Capítulo 2
Cerillas

Las cerillas, sean de papel o de madera, tienen dos propiedades que las hacen idóneas para divertimentos matemáticos. Pueden servir de «cuentas» y también de segmentos de longitud unidad. La recopilación de todos los pasatiempos con cerillas ocuparía un grueso volumen. En este capítulo nos fijaremos en unas cuantas muestras representativas de los trucos, juegos y acertijos que se pueden realizar con cerillas.

Todos los ilusionistas conocen el viejo truco «del piano» (así llamado por la posición de las manos del espectador) que puede anunciarse como un intercambio mágico de par a impar. Se le pide a un espectador que coloque las manos sobre la mesa, palmas abajo. Entre cada par de dedos contiguos insertamos dos cerillas, excepto entre los dedos anular y meñique de una mano, donde sólo colocaremos una (véase la Figura 10).

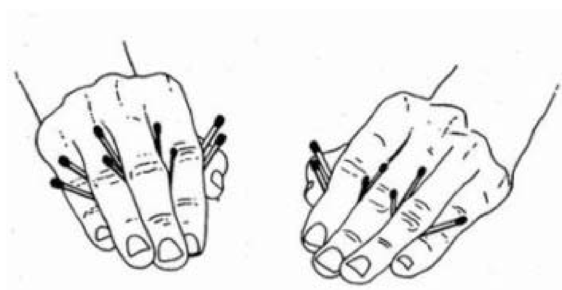

Figura 10. El truco del piano

Ahora iremos retirando uno por uno los pares de cerillas, separando las cerillas de cada par, que iremos colocando sobre la mesa, una frente a cada una de las manos del espectador. En cada extracción el mago repite «Dos cerillas», y de este modo, formando un montoncito de cerillas frente a cada mano, hasta que sólo quede la cerilla desemparejada. Se retira esta cerilla de la mano del paciente espectador, y sosteniéndola en alto, se dice: «Tenemos ahora dos montones de cerillas, formados ambos por pares. ¿En qué montón quiere que ponga esta cerilla suelta?» La cerilla se coloca donde nos indiquen.

Señale usted el montoncito donde quedó la cerilla extra, y diga: «En este montón hay una cerilla de más». Y señalando el otro: «Y aquí hay un montón formado por pares de cerillas». Se dan entonces unos cuantos pases mágicos sobre los montones y se anuncia que con ellos la cerilla desemparejada se verá obligada a pasar al otro montón. Para demostrar que verdaderamente así ha ocurrido, «contamos» las cerillas del grupo donde pusimos la última, apartándolas de dos en dos, y dejándolas en un lado. Escribimos «contar», entrecomillado, porque en realidad no se las cuenta. En vez de eso, vaya diciendo tan sólo «dos cerillas» cada vez que las aparte del montón. El montón estará formado justamente por pares, y por ello, al final no quedarán cerillas desemparejadas. Se «cuenta» el otro montón de igual manera. Al retirar el último par quedará todavía una cerilla suelta. Un poco de palique en tono convincente bastará para dejar perplejo a casi todo el mundo. El truco funciona por sí solo, sin especial habilidad del mago, y el lector que lo ensaye un poco comprenderá inmediatamente por qué.

En la primera recopilación conocida de cuestiones y problemas de matemática recreativa, Problémes plaisans et délectables, de Claude Gaspar Bachet, publicado en Francia en 1612, podemos ver un truco que se remonta a tiempos medievales. La versión clásica es como sigue.

Se disponen sobre la mesa 24 cerillas y tres objetos pequeños, una moneda, un anillo y una llave, por ejemplo. Se pide colaboración a tres espectadores. Designémoslos 1º 2º y 3º. Para estar seguro de recordar el orden en que han sido llamados (les dice usted) le da una cerilla a su primer ayudante, dos al segundo, y tres al tercero. Estas cerillas se toman de las 24 que hay en la mesa, con lo cual queda un montoncito de 18 fósforos. Se dice a los ayudantes que se guarden en un bolsillo las cerillas que han recibido.

Vuélvase de espaldas para no ver lo que sucede, y pídale al espectador número 1 que coja uno de los tres objetos y se lo guarde en el bolsillo. El segundo espectador toma uno de los dos objetos restantes, y el tercer espectador, el único que todavía queda. Pídale ahora a la persona que tomó la moneda que retire de la mesa tantas cerillas como inicialmente recibió, y que las guarde en el puño. (Usted no tiene forma de saber quién es, pues está vuelto de espaldas.) Dígale a la persona que haya cogido el anillo que recoja de la mesa doble número de cerillas de las que recibió, y que las guarde en el puño. Pídale al que cogió la llave que tome el cuádruplo de su número de cerillas, y que las guarde también.

Entonces se vuelve usted hacia sus ayudantes, y tras fingir durante unos instantes concentrarse para lograr percepción extrasensorial, le dice a cada uno el objeto que ha elegido. La clave reside en el número de cerillas que aún quedan en la mesa. Hay seis permutaciones posibles de los tres objetos tomados por los espectadores; cada una de ellas deja en la mesa distinto número de cerillas sobrantes.

Denotemos los objetos P, M y G (pequeño, mediano, y grande); la tabla de la Figura 11 muestra la permutación correspondiente a cada posible colección de cerillas residuales. (Es imposible que sobren cuatro cerillas. Si viera usted que sobre la mesa quedan cuatro cerillas, alguien se ha equivocado o ha hecho trampa, y es preciso repetir el truco). Se han construido docenas de frases mnemotécnicas para facilitar al mago la tarea de averiguar cómo están distribuidos los objetos. Bachet marcó los objetos con las letras a, e, i, las tres primeras vocales, y construyó la siguiente frase, en francés: (1) Par fer (2) César (3) jadis (5) devint (6) si grand (7) prince.

CERILLAS SOBRANTES	ESPECTADORES		
	1	2	3
1	P	M	G
2	M	P	G
3	P	G	M
5	M	G	P
6	G	P	M
7	G	M	P

Figura 11. La clave del truco de los tres objetos

Las dos vocales de cada palabra o frase bastan para dar la información necesaria. Por ejemplo, si el mago ve cinco cerillas sobre la mesa, la quinta palabra, «devint», le dice que el objeto ***e*** fue tomado por el primer espectador (quien recibió una cerilla) y el objeto ***i*** por el segundo (quien tenía dos cerillas). El objeto restante ***a*** debe encontrarse en el bolsillo del tercer espectador, a quien se le dieron tres cerillas al comienzo del truco.

Otros ilusionistas del siglo XVII, recurriendo también a las tres vocales para designar los objetos, prefirieron recordar las seis permutaciones ayudándose de las dos primeras vocales de cada palabra de la siguiente frase latina: *Salve certa animae semita vita quies*.

En la versión presentada aquí, donde los objetos han sido designados P, M y G, podemos usar la siguiente frase mnemotécnica: (1) Pimpantes (2) mapas (3) plegaba [(4) con] (5) magníficas (6) grapas (7) gemelas. Las dos primeras apariciones de las letras clave, que están en negrita, nos dicen los dos objetos tomados por el primer y segundo espectadores, respectivamente; el tercer objeto corresponde necesariamente al tercer espectador. El lector puede pasar un rato entretenido componiendo otras frases de su invención. Para designar los objetos pueden usarse otras letras, como A, B y C o L, M, P (ligero mediano, pesado), las iniciales de los objetos utilizados, etc. Conviene introducir en la frase una cuarta palabra, de relleno, como hicimos antes, no obstante ser imposible que sobren cuatro cerillas, pues ello permite al ilusionista contar rápidamente las cerillas señalando cada una con una palabra de la frase, sin tener que preocuparse de saltar el número cuatro cuando hayan quedado más de tres. El truco admite una interesante generalización, que data de 1893, para n objetos y n espectadores, fundado en el sistema de numeración de base n. Puede verse en *Mathematical Recreations and Essays*, de W. W. Rouse Bail (página 30 de la edición revisada, 1960).

Un truco telepático más reciente se sirve de un poco de teoría elemental de números (que todavía algunos llaman aritmética) y de una carterita pequeña de 20 cerillas de papel. Vueltos de espaldas, le pedimos a un espectador que arranque del sobre un número cualquiera de cerillas, de 1 a 10, y que se las guarde en un bolsillo. Dígale entonces que cuente para sí el número de las restantes, y que sumando las dos cifras de ese número, arranque de la carterita otras tantas cerillas. (Por ejemplo, si hubiesen quedado 16 cerillas, tendría que sumar 1 y 6, y arrancar 7 fósforos más.) Estas cerillas debe también guardarlas en el bolsillo. Finalmente, el espectador arranca unas cuantas cerillas más, a su capricho, y las guarda en el puño. Entonces se vuelve usted y recoge la carterita, contando de una ojeada el número de cerillas sobrantes al tiempo de guardársela en el bolsillo. Y ahora podemos decir el número de cerillas que el espectador oculta en su puño. En efecto, tras las dos primeras operaciones siempre sobran en el sobre nueve cerillas. (¿Sabría usted decir por qué?) Bastará por tanto restar de 9 el número de cerillas restantes en el sobrecito para saber el número de las ocultas en la mano.

Las cerillas pueden ser útiles en diversidad de juegos que, como el nim, se desarrollan retirando fichas o cuentas, o en ciertos juegos de apuestas, como el de «los chinos». Pero resultan particularmente adecuadas para el que ahora explicaremos, tanto por su forma como por la facilidad de tenerlas de varios colores. El juego fue inventado por Jurg Nievergelt, matemático especialista en cálculo automático, quien lo ha bautizado «Hit and Run». Por lo general la partida se desarrolla sobre una matriz cuadrada de orden 4 (véase la Figura 12).

Los jugadores disponen inicialmente de unas carteritas de 20 cerillas, cuyas cabezas han de ser de distintos colores, gris y negro, por ejemplo. No deja de ser grata coincidencia que las 40 cerillas de que disponen sean precisamente el máximo necesario. Los jugadores van por turno colocando cada uno una cerilla en uno cualquiera de los segmentos de la matriz. Las negras se proponen construir un camino que conecte los dos lados negros del tablero; las grises lo mismo con los otros dos lados. (Los caminos contrarios pueden cortarse en ángulos rectos). El primer jugador que consiga construir un camino gana la partida.

El juego se llama «Hit and Run», porque cada jugada puede servir tanto para bloquear un camino del adversario (un «hit» en béisbol) como para, al mismo tiempo, prolongar un camino («run»).

El juego tiene superficialmente cierto parecido con el Hex de Piet Hein y con variantes posteriores, como el Bridg-it y el Twixt (puede verse el Bridg-it en Nuevos pasatiempos matemáticos, de Martin Gardner, Alianza Editorial, Madrid), pero la estructura matemática subyacente a él es profundamente diferente.

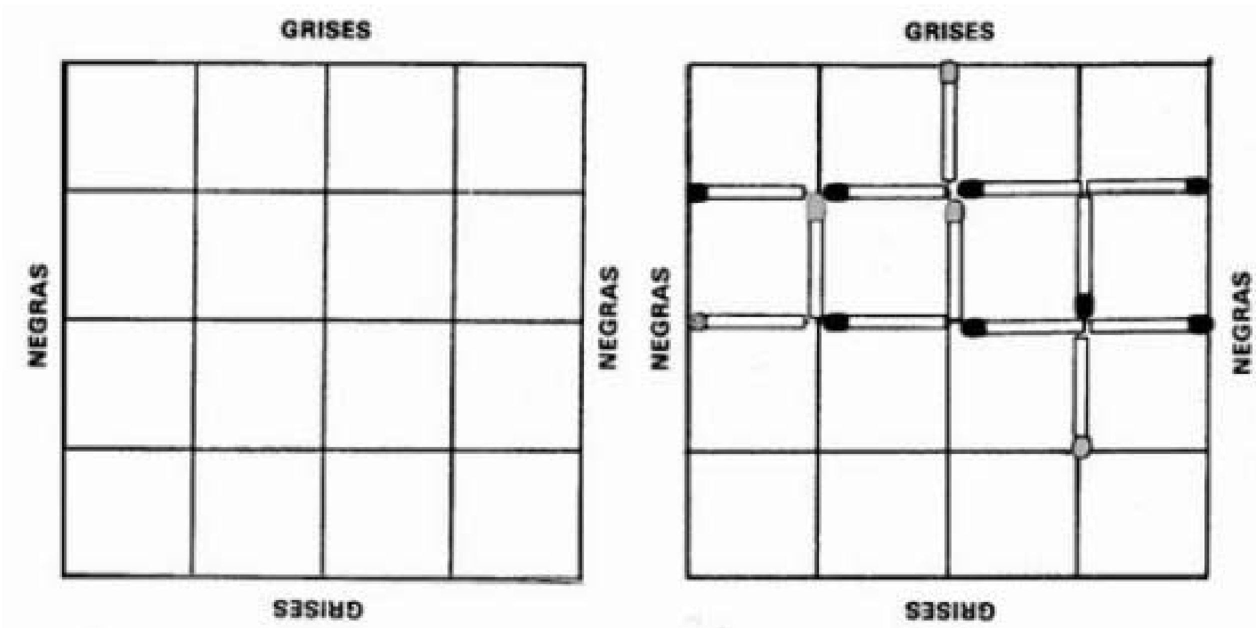

Figura 12. El tablero "hit and run" (izquierda) y una partida terminada (derecha)

Al igual que para el «tres en raya», puede demostrarse fácilmente que si el primero en jugar actúa racionalmente, toda partida de «Hit and Run» acabará ya en victoria de éste, ya en tablas. Supongamos que existiera alguna estrategia que diera siempre la victoria al segundo en jugar. El primer jugador podría entonces apropiársela haciendo un primer movimiento intrascendente, y siguiendo en lo sucesivo la estrategia de victoria. La jugada de espera es en todo caso una ventaja, nunca un inconveniente. Si la estrategia ganadora exigiese más tarde realizar una jugada de espera, como la jugada ha sido realizada ya se efectúa una segunda jugada intrascendente. De esta forma el primer jugador puede ganar. Pero así contradecimos la hipótesis inicial. Por tanto, para el segundo jugador no puede existir una estrategia capaz de garantizarle la victoria. En consecuencia, el primer jugador puede siempre vencer o empatar, si bien la demostración no da información ninguna sobre la táctica a seguir para lograrlo.

En un cuadrado de orden 2 se ve fácilmente que el primer jugador tiene siempre asegurada la victoria (parte izquierda de la Figura 13). El primer movimiento de las negras N1 obliga a las grises a replicar G1. Haciendo N2, las negras se encuentran en situación de completar su camino en una jugada más, y esto de dos formas posibles (marcadas N3); las grises no tienen ahora manera de impedir la victoria negra en la jugada siguiente. Las negras pueden ganar de forma parecida saliendo en cualquiera de los seis tramos verticales.

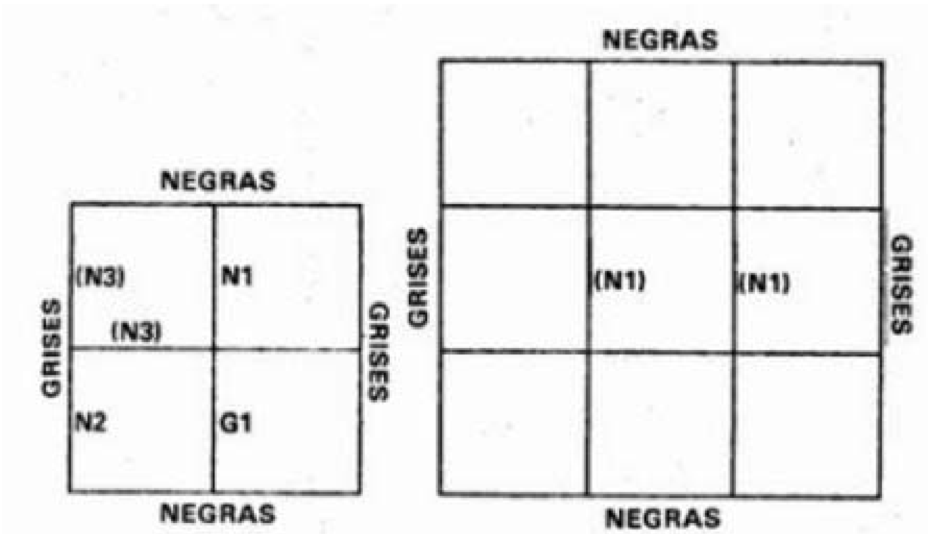

Figura 13. Tácticas vencedoras para el primer jugador con tableros de orden 2 (izquierda) y orden 3 (derecha)

Los lectores podrían entretenerse en demostrar que en el cuadrado de orden 3 también el primer jugador (negras) puede ganar siempre la partida ocupando en la salida cualquiera de los segmentos marcados N1 (parte derecha de la Figura 13).

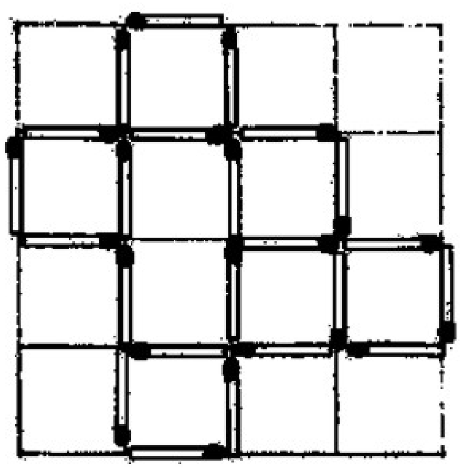

Figura 14. Fin de una partida de "Connecto"

Nievergelt llegó a esta conclusión estudiando exhaustivamente todas las posibilidades. Como este análisis es largo y tedioso, no lo expondremos aquí. Por lo que yo sé, se ignora todavía si en tableros de orden 4, y no digamos más alto, el primer jugador dispone de estrategia de victoria.

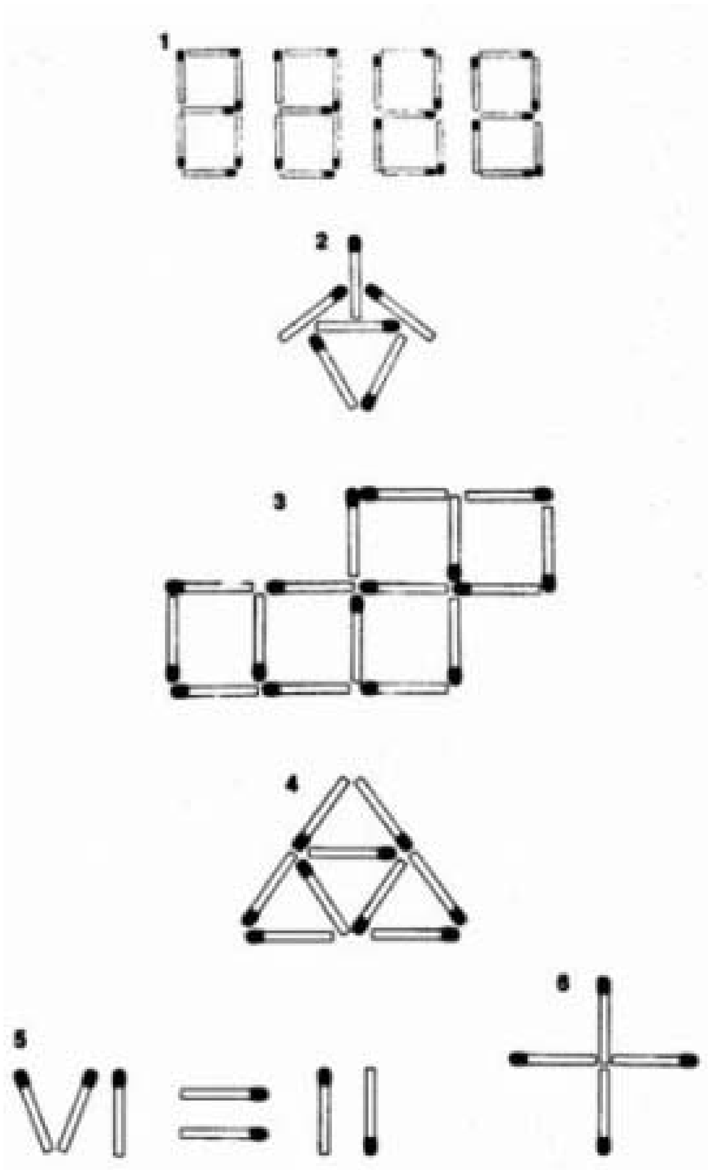

Figura 15. Seis pasatiempos con cerillas

También pueden usarse cerillas de dos colores para jugar a Connecto, descrito por David L. Silverman en su libro *Your Move* (McGraw-Hill, 1971). También aquí dos jugadores van por turnos colocando cerillas en una matriz cuadrada de tamaño arbitrario, pero el objetivo es ahora ser el primero en delimitar una región cerrada de forma cualquiera cuya frontera esté formada por cerillas del color propio.

En la Figura 14 las negras han ganado la partida. ¿Sabrá usted descubrir una sencilla estrategia, dada ya por Silverman, mediante la cual el segundo jugador puede siempre impedir la victoria del primero, incluso sobre matrices infinitas?

Para terminar, he aquí seis entretenidos pasatiempos con cerillas (véase la Figura 15):

1. Retirando once cerillas, dejar seis.
2. La disposición de seis cerillas que vemos define un mapa planar que requiere tres colores si se exige que ningún par de regiones con una cerilla frontera común estén coloreadas del mismo tono. El problema consiste en redisponer las seis y formar un nuevo mapa planar que precise de cuatro colores. Al estar el mapa confinado al plano hay que descartar la sencilla solución tridimensional consistente en el esqueleto de un tetraedro.
3. Cambiando de posición dos cerillas hay que reducir de 5 a 4 el número de cuadrículas unitarias de la figura. No es lícito dejar «cabos sueltos», es decir, cerillas no utilizadas como lados de un cuadrado. Una notable característica de este clásico problemita es que, incluso una vez resuelto, podemos volverlo del revés, volverlo cabeza abajo, o ambas cosas, y seguirá siendo casi tan difícil de resolver como lo era inicialmente.
4. En la disposición de la figura es cosa fácil dejar sólo dos triángulos equiláteros retirando cuatro cerillas. Tampoco es difícil lograr lo mismo eliminando tres. ¿Pero sabrá el lector suprimir sólo dos cerillas y dejar dos triángulos equiláteros? Como antes, tampoco deben quedar cabos sueltos.
5. Moviendo solamente una cerilla debemos lograr una igualdad verdadera. No es válido tachar el signo «igual» con una cerilla y obtener una desigualdad verdadera; la expresión final debe ser una auténtica igualdad.
6. Moviendo solamente una cerilla hay que formar un cuadrado. (La vieja broma de deslizar uno o dos milímetros hacia arriba la cerilla central superior, y dejar en el centro de la cruz un minúsculo hueco cuadrado no es válida. La solución también es humorística, pero la broma va ahora por muy distinto camino.)

Apéndice

En el texto, al describir los dos juegos con cerillas hemos supuesto que sus cabezas son de distinto color; pero si encontrásemos carteritas donde las cerillas, y no sólo sus cabezas, fueran de colores diferentes, seria todavía mejor. Y como es natural, ambos pueden jugarse sobre papel, dibujando una matriz de puntos a conectar con trazos rectos de dos colores.

Nievergelt ha hecho notar que la demostración de Silverman acerca de estrategias vencedoras para el segundo jugador en las partidas de «Connecto» deja de ser válida en otras disposiciones regulares de puntos. Por ejemplo, sobre una red triangular, el primer jugador puede vencer siempre, completando un triángulo unitario a lo más tardar en su séptima jugada.

Nievergelt opina que el Connecto es aún más interesante sobre otras retículas de tipo diferente, y en concreto se pregunta de quién puede ser la victoria sobre una malla cúbica. «Sería interesante, dice, que alguien lograse dar condiciones definibles en términos de teoría de grafos que permitieran clasificar los grafos regulares infinitos según que el primer jugador consiga o no imponer un circuito cerrado.»

Soluciones

El rompecabezas de David Silverman se resuelve observando que todo jugador que gane una partida de Connecto ha de tener forzosamente dos cerillas que formen la letra L en la frontera de su región. El segundo jugador puede impedir que venza el primero, cualquiera que sea el tamaño del tablero, sin más que impedir que su contrario forme una L. Si el primer jugador ocupase la barra vertical de una posible L, el segundo respondería trazando la correspondiente barra horizontal; y si el primero dibujase la barra horizontal, el segundo formaría la vertical. Con esta estrategia el segundo jugador tiene garantizado, como mínimo, un empate.

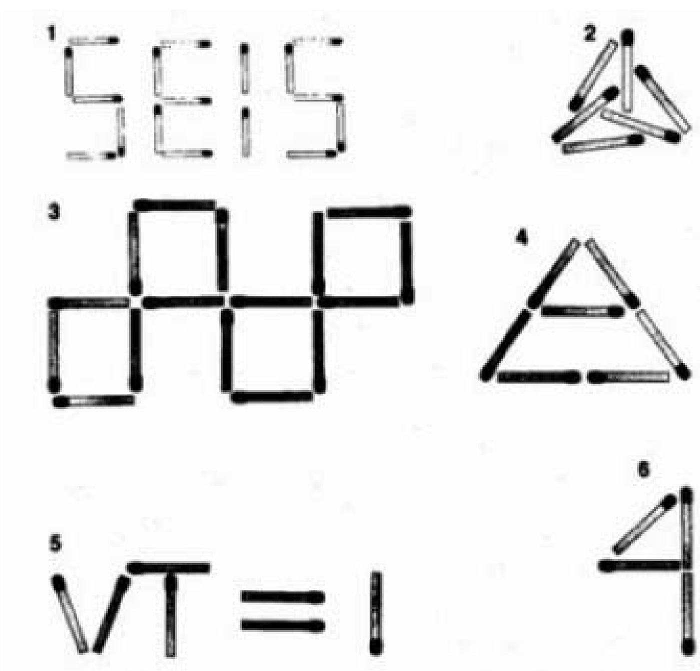

Figura 16. Soluciones a los pasatiempos con fósforos.

En la Figura 16 pueden verse las soluciones de los seis pasatiempos con cerillas; algunos lectores descubrieron una segunda solución para el quinto: el VI del primer miembro se transforma en un XI, que es equivalente, en cifras romanas, al 11 arábigo que figura en el segundo.