

Capítulo 1

Ilusiones ópticas

Las ilusiones ópticas, figuras, objetos o sucesos que no son lo que aparentan al ser percibidos, han tenido y tienen todavía importante papel en las bellas artes, en matemáticas, en psicología e incluso en filosofía. Los antiguos griegos deformaron las columnas del Partenón con el fin de que parecieran perfectamente rectas al ser vistas desde el suelo por la gente. En sus grandes obras murales, los pintores renacentistas solían distorsionar las figuras con objeto de que, miradas desde abajo, parecieran ser de proporciones normales. El interés de los matemáticos por las ilusiones ópticas se debe a que muchas de ellas guardan relación con la perspectiva (una rama de la geometría proyectiva) y con otras cuestiones geométricas. Los psicólogos estudian las ilusiones para saber cómo interpreta el cerebro los datos que le llegan a través de los sentidos. Y los filósofos de diversas escuelas de realismo directo, que mantienen que nosotros percibimos objetos reales externos a nuestras mentes, tienen el problema de explicar cómo pueden entonces presentarse errores de percepción.

Consideradas en su aspecto menos serio, las ilusiones visuales son, sencillamente, divertidas. Disfrutamos sabiéndonos engañados por ellas, por motivos que no se diferencian mucho del placer de ser confundidos por un ilusionista. Las ilusiones nos recuerdan que el ancho mundo exterior no siempre es lo que parece. Nos fijaremos en este capítulo en unas cuantas ilusiones ópticas no demasiado conocidas, que exhalan todas ellas fuerte aroma matemático.

Los procesos de que el cerebro se vale para interpretar los datos visuales son tan complejos y poco conocidos, que no es milagro que en sus explicaciones los psicólogos mantengan opiniones divergentes, cuando no contradictorias, incluso para las ilusiones más sencillas. Entre las más clásicas están el aumento aparente del sol, la luna y las constelaciones cuando están cerca del horizonte. El difunto Edwin G. Boring, de la Universidad Harvard escribió numerosos artículos explicando que la «flusión de la luna» se debe fundamentalmente a la acción de alzar la mirada. Una opinión diferente, que se remonta hasta Ptolomeo, es defendida por Lloyd Kaufman e Irvin Rock en su artículo «The Moon Illusion», en *Scientific American* de julio de 1962. Su teoría, basada en el efecto de «distancia aparente», es a su vez refutada por Frank Restle en un trabajo publicado en *Science* del 20 de febrero de 1970. La opinión actual es que casi todas las ilusiones ópticas se originan en el cerebro, cuando éste va explorando su memoria en busca de lo que Richard L. Gregory denomina «la apuesta óptima», es decir, la interpretación que mejor explique los datos visuales a partir de las experiencias acumuladas por el cerebro. Tal punto de vista está sustentado por el reciente

descubrimiento de que muchos animales, entre ellos aves y peces, sufren ilusiones que podrían ser explicadas de esta forma y también, por trabajos de antropología en culturas marcadamente diferentes de la nuestra. Los zulúes, por ejemplo, viven inmersos en un mundo de formas redondeadas. Las cabañas son redondas, y también lo son sus puertas. Al arar, sus surcos trazan líneas curvas. Raramente tienen ocasión de ver líneas o ángulos rectos, y su idioma no contiene ningún vocablo que signifique «cuadrado». Así nos lo dice John Updike en la segunda estrofa de su poema «Zulus Live in Land Without a Square»:

*Cuando los zulúes sonreír no pueden,
ceñudos fingen enojos,
para siempre tener curvas
frente a los ojos.
Y las distancias entre lugares y cosas
se calculan «a vuelo de mariposa»...*

Diversos estudios recientes han mostrado que ciertas ilusiones relativas a rectas paralelas y esquinas en ángulo, figuras que con tanta frecuencia observamos en el mundo rectangular de las sociedades tecnológicamente adelantadas, difícilmente son percibidas por los zulúes. Los filósofos John Locke y George Berkeley se preguntaron ambos si un ciego de nacimiento que súbitamente recuperase la vista sabría distinguir, sin tocarlos, cuál de dos objetos era un cubo y cuál una esfera. Locke y Berkeley respondieron que no. Una obra de Gregory, *Eye and Brain*, resume estudios recientes en esta misma dirección, y aunque no se llega a conclusiones tajantes, sí parece dar la razón a aquellos filósofos, aportando de nuevo pruebas que justifican el enfoque moderno, a saber, que casi todas las ilusiones ópticas se deben a que el cerebro interpreta erróneamente los datos que recibe.

El descubrimiento de figuras «indecidibles» ha suscitado nuevos y entretenidos desarrollos en la teoría de las ilusiones visuales. Las figuras indecibles representan objetos que no pueden existir. La mente, incapaz de encontrarles pies ni cabeza, queda sumida en un estado de curiosa perplejidad. (Son figuras que recuerdan proposiciones indecibles, como «Esta proposición es falsa», o «No te lo pierdas si puedes»). Entre las figuras indecibles, la más conocida es el notable «blivet» (que un americano pronunciaría casi igual que «believe it», «créalo») de tres columnas (¿o sólo dos?) que vemos en la Figura 1.

Las primeras versiones empezaron a circular entre ingenieros y proyectistas hacia 1964, y la portada del número de marzo de 1965 de la revista *Mad* mostraba a un Alfred E. Neuman sonriente y haciendo equilibrios con el blivet sobre su dedo índice. Roger Hayward ha publicado un artículo sobre «Blivets: Research and Development» [Investigación y desarrollo

de los blivets] en *The Worm Runners Digest* (diciembre de 1968), donde presentaba algunas variantes (véase la Figura 1).



Figura 1. El monumento "indecible" proyectado por Roger Hayward

Otra conocida figura indecible es una escalinata cuadrada por la que se puede ascender o descender indefinidamente sin por ello subir ni bajar. Puede verse en una litografía de Maurits C. Escher titulada «Ascendiendo y descendiendo», que data de 1960, así como en otra litografía del mismo artista, de 1961, que representa un salto de agua haciendo funcionar una máquina de movimiento perpetuo. Esta desconcertante ilusión, creada por el genetista inglés L. S. Penrose y por su hijo, el fisicomatemático Roger Penrose, fue inicialmente publicada en un artículo de ambos, «Impossible Objects: A Special Type of Visual Illusion» [Un tipo especial de ilusiones visuales: los objetos imposibles], en *The British Journal of Psychology* (febrero de 1958, pp. 31-33).

Estos mismos dos autores se sirvieron otra vez de ella en su colección de originales «rompecabezas navideños» publicada en *The New Scientist* (25 de diciembre de 1958, pp. 1580-81). Admitiendo (véase la Figura 2) que hagan falta tres peldaños para ir desde A, en el suelo, hasta lo alto del escalón B, ¿cómo se puede ir desde A hasta C sin subir más de 10 escalones? La solución sólo es posible porque la propia estructura dibujada no lo es.

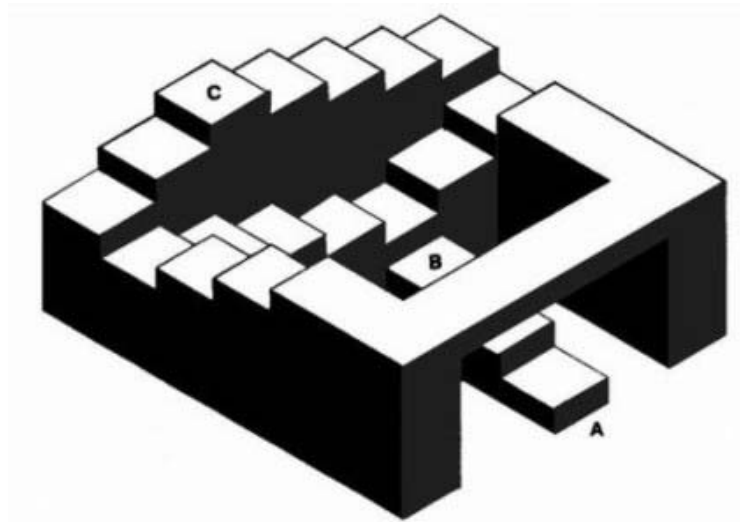


Figura 2. Un enigma basado en la escalinata de Penrose

Un tercer objeto imposible también muy conocido es la armazón del cubo sostenido por la figura sedente de otra famosa litografía de Escher, que puede verse en la página 110 de mi Carnaval matemático. La sección de «Cartas» de Scientific American reproducía una fotografía de esta «Canasta de acceso libre» (así fue llamada) en el número de junio de 1966; en realidad aquella fotografía se obtuvo retocando el negativo. No obstante, sí es posible construir un modelo real que visto desde un ángulo adecuado nos dé una auténtica fotografía de la «canasta». Su construcción ha sido explicada por William G. Hyzer en Photo Methods for Industry, enero de 1970.

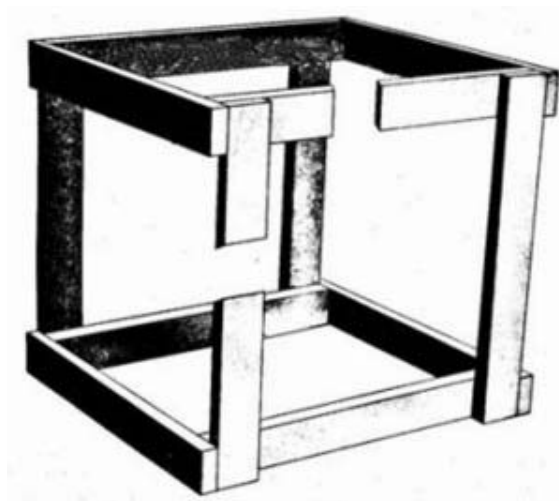


Figura 3. Un posible modelo de una canasta imposible

Vemos en la Figura 3 el modelo de Hyzer. Si lo giramos yladeamos hasta que, observándolo con un solo ojo, los huecos coincidan con toda exactitud con dos travesaños traseros del armazón, el cerebro se convence de que las aristas traseras están delante, produciendo la imagen mental de un cubo imposible.

Muchas otras curiosas ilusiones son debidas a que poseemos dos ojos. Extienda los brazos ante sí, manteniendo los dedos índices de ambas manos estirados horizontalmente, con las puntas en contacto. Mirando más allá de los dedos, enfoque la mirada sobre una pared distante, y separe los dedos ligeramente. Verá entonces una «salchicha flotante» entre los dedos. Como es obvio, la salchicha está formada por las imágenes superpuestas de las yemas de los dedos, vistas cada una por distinto ojo.

Otra antigua ilusión, también debida a la visión binocular, se produce acercando un tubo (es suficiente una hoja arrollada de papel) a un ojo, como si fuera un telescopio. Supongamos que llevamos el tubo al ojo derecho; la mano izquierda, con la palma vuelta hacia uno mismo, se coloca verticalmente pegada al borde izquierdo del tubo. Deslizandohacia adelante y hacia atrás la mano izquierda a lo largo del tubo, con los dos ojos abiertos y mirando algún objeto distante, se encontrará un punto donde parecerá que estamos mirando a través de un agujero recortado en el centro de la mano izquierda.

En ciertas circunstancias, también la visión monocular puede crear una ilusión de profundidad. Mirando una fotografía con un solo ojo a través de un tubo se produce un ligero efecto de tridimensionalidad. Una de las más llamativas ilusiones de la visión monocular puede verse en la Figura 4.

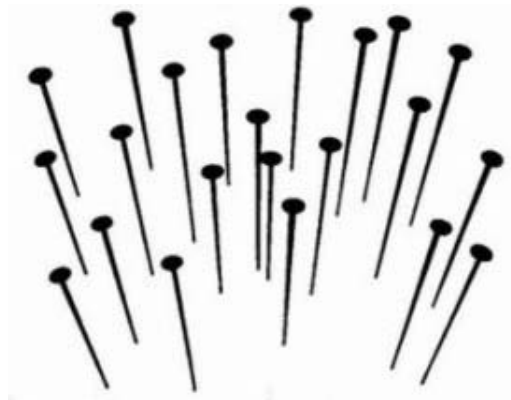


Figura 4. Los clavos se ponen en pie

Es necesario inclinar el libro hacia atrás, hasta que el plano de la página quede casi enrasado con la vista. Mirando la figura con un solo ojo desde un punto próximo al borde inferior de la página, aproximadamente donde convergerían los clavos si fuesen prolongados

hacia abajo, durante un breve instante los clavos parecerán ponerse en pie. William James, en el Capítulo 19 del Volumen 2 de sus famosos *Principles of Psychology*, tras dar una excelente explicación de esta ilusión, añade esta sucinta coletilla, que resume las ideas actuales sobre la percepción: «Dicho con otras palabras, nosotros vemos, como siempre, el objeto más verosímil».

El llamado «péndulo de Pulfrich» es otra asombrosa ilusión binocular, que recibe su nombre de su descubridor, Carl Pulfrich, quien la dio a conocer en 1922, en una revista alemana. El péndulo está formado, sencillamente, por un trozo de hilo, que puede tener desde unos 30 cm hasta más de un metro. De él pende un objeto pequeño. Pídale a otra persona que sostenga la punta libre del cordel, y que mantenga el péndulo en oscilación en un plano perpendicular al de su línea de visión.

Sitúese usted en el otro extremo de la habitación, frente al péndulo, que se habrá de observar con ambos ojos. Con uno se mira directamente; con el otro, a través de uno de los cristales de unas gafas de sol. Es preciso fijar la mirada en el punto medio de la oscilación; la vista no debe ir siguiendo a la plomada en su vaivén. ¡Parecerá entonces que el peso describe una órbita elíptica! Trasladando al otro ojo el cristal oscuro, el peso seguirá describiendo la misma órbita elíptica, pero ahora recorrida en sentido contrario. Tan fuerte es la ilusión de profundidad, que colocando por detrás del plano de oscilación un objeto grande parece como si el plomo pasase en realidad a través del objeto, como un fantasma. Gregory explica la ilusión de Pulfrich diciendo que el ojo adaptado a la oscuridad envía sus señales al cerebro más lentamente que el ojo descubierto. Este desfase entre las señales induce al cerebro a interpretar el movimiento del plomo como si alternativamente fuese pasando por delante y por detrás de su plano de oscilación.

Pueden experimentarse sensaciones de profundidad parecidas al mirar imágenes de televisión, cubriendo un ojo con un cristal oscuro o mirando con uno de los ojos a través de un pequeño orificio perforado en cartulina. Cuando en la pantalla aparece una imagen que se desplaza horizontalmente con cierta velocidad, el observador tendrá la impresión de que lo hace por delante o por detrás de la pantalla. Esta ilusión animó a varias compañías a anunciar, en 1966, unas gafas especiales que, de creer a la publicidad, permitirían al espectador ver en tres dimensiones las imágenes planas de su televisor. El precio era elevado, pero evidentemente las gafas no eran sino una montura barata provista de dos lentes de plástico, una transparente y otra oscura.

Otra conocida categoría de figuras ilusorias, muy analizadas por la escuela psicológica de la Gestalt, está formada por imágenes que pueden ser interpretadas de dos maneras con probabilidades iguales o casi iguales. La mente fluctúa entre ambas interpretaciones, incapaz de decidir cuál es la apuesta óptima. Probablemente el ejemplo más conocido sea el

apilamiento de cubos que se invierte repentinamente, haciendo cambiar el número de cubos que parecen formarlo. En estos últimos años todos hemos tenido dificultades de interpretación al contemplar fotografías de cráteres lunares y no poderlos ver como montañas, sobre todo si invertimos la fotografía, con lo que los cráteres se ven iluminados desde abajo por la luz solar, ángulo de iluminación que raramente habremos tenido ocasión de experimentar.

Hay una figura de un jarrón oscuro cuya silueta puede ser imaginada como los perfiles de dos caras. Una ilusión parecida saltó inesperadamente a la palestra en la nueva bandera canadiense, adoptada oficialmente en 1965 tras varios meses de disputas parlamentarias. Fije usted la atención en el fondo blanco, por encima de la hoja de arce (véase la Figura 5).



Figura 5. Los hombres enojados de la bandera canadiense

Se verán entonces los perfiles de dos hombres malhumorados (¿quizás un liberal y un conservador?) con las frentes en contacto, zahiriéndose (¿uno en francés y otro en inglés?). En cuanto haya usted localizado estas dos caras, ya no tendrá dificultad en descifrar el significado de los polígonos de formas irregulares que en bloques negros podemos ver en la Figura 6.



Figura 6. Un efecto "Gestalt". ¿Qué representan los contornos negros?

Otra figura muy estudiada es el cubo de Necker, así llamado en honor del suizo L. A. Necker, quien escribió acerca de él allá por 1830.

El cubo tiene la propiedad de invertirse al observarlo. Los Penrose, en los acertijos navideños ya mencionados, tuvieron la feliz idea de añadir un escarabajo al «cubo», en este caso una caja rectangular. (Véase la Figura 7.) El insecto parece encontrarse en la pared exterior.

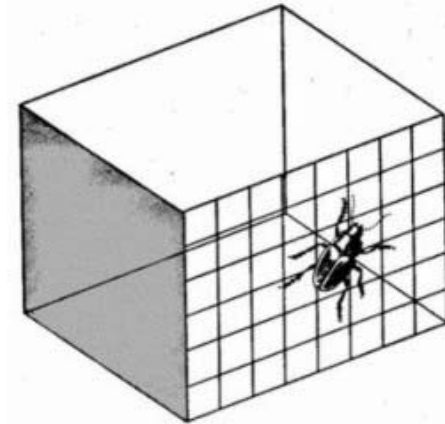


Figura 7. Hay que encerrar el insecto en la jaula

Pero si fijamos la mirada en el ángulo inferior izquierdo de la caja, y con la imaginación nos esforzamos en pensar que esa es la esquina más cercana, de repente, iflip, flop!, el insecto queda encerrado en su jaula, transportado por la acción del pensamiento.

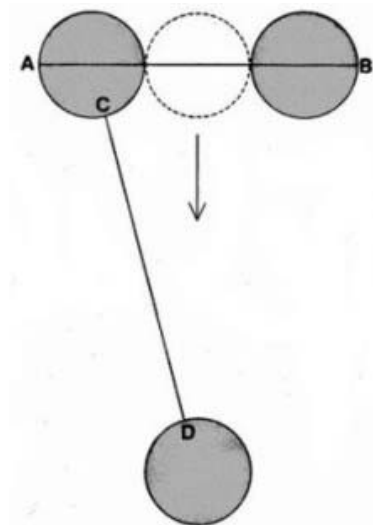


Figura 8. Una ilusión de equidistancia

Con tres monedas podemos poner de manifiesto otra sorprendente ilusión, seguramente relacionada con la ilusión de Müller-Lyer (dos segmentos de longitudes iguales que parecen ser de tamaños distintos a causa de las puntas de flecha trazadas en sus extremos: en una de las figuras apuntan hacia afuera y en la otra hacia adentro). Se colocan las monedas en fila (véase la Figura 8) y se le pide a otra persona que haga deslizar hacia abajo la moneda central hasta que la distancia AB sea igual a la distancia CD. Casi nadie separa la moneda lo suficiente; en realidad, cuesta creer que la solución correcta sea la dada en la ilustración. El truco puede repetirse con monedas mayores, mesitas circulares, vasos de agua y objetos parecidos.

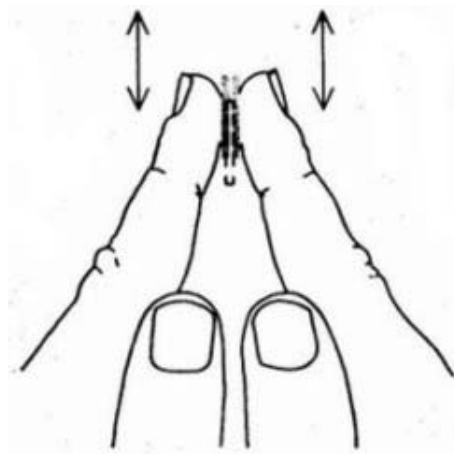


Figura 9. La moneda fantasma

La ilusión de la «moneda fantasma», que vemos en la Figura 9, es más conocida por los ilusionistas que por los psicólogos. Sostenga una contra otra dos monedas entre las yemas de los dedos índices y frótelas rápidamente una contra otra. Aparecerá entonces una tercera moneda, la moneda fantasma. ¿Pero por qué solamente por un extremo y no por el otro?

Soluciones

Para subir hasta lo alto de la escalera de Penrose en sólo 10 pasos, se suben cuatro peldaños, se gira a la derecha, se suben otros tres escalones más, se recorre la ronda de forma de U, se bajan tres peldaños, y se suben otros tres, llegando así a lo alto.

Aunque nunca he visto impresa ninguna explicación del efecto de la moneda fantasma, he recibido de muchos lectores una tan convincente que no dudo tiene que ser correcta. Al frotar las monedas, adelante y atrás, como se ha explicado, el ángulo que forman los dedos hace que las monedas tiendan a divergir en la posición adelantada, creando allí dos imágenes claramente distintas. Por el contrario, en la parte trasera, donde los dedos forman

una V, el ligero movimiento lateral provoca que en la posición retrasada las monedas tiendan a converger, y que sus imágenes se superpongan. La consecuencia es que las imágenes delanteras, individuales, son débiles, mientras que las traseras se refuerzan la una a la otra, creando una imagen única, más intensa.

Los propios lectores describieron diversas formas sencillas de comprobar esta teoría. Por ejemplo, Marjorie Lundquist y S. H. Norris propusieron el siguiente experimento. Vuelva las palmas hacia afuera, con los pulgares señalando hacia usted, sosteniendo dos monedas entre las puntas de los dedos y frotándolas, la imagen fantasma se forma en la V de los pulgares, en el sentido de alejarse del experimentador. Y así es como deberíamos esperar que sucediese, pues a causa de los ligeros movimientos laterales, la superposición tiende a producirse en el lado más alejado. Si los dedos se colocan no formando una V, sino directamente opuestos uno a otro, en línea recta, los desplazamientos laterales son iguales en ambos lados, y se ven dos monedas fantasmas. La misma imagen fantasma, simétrica y doble, se producirá cuando las monedas se sujeten con los índices, pero en lugar de frotarlas adelante y atrás lo hagamos de arriba a abajo, verticalmente.

Otra llamativa confirmación de la teoría, que descubrí por mí mismo, se obtiene frotando rápidamente las yemas de los dedos, adelante y atrás, sin moneda ninguna entre ellos. La divergencia por la parte delantera y la superposición por la trasera son evidentes. ¡Se verá un dedo fantasma dentro de la V, con el filo de una uña justo en su centro!

La ilusión de la moneda fantasma puede convertirse fácilmente en un truco de prestidigitación. Se comienza ocultando una moneda no muy grande en los pliegues de la palma de la mano derecha. Se le pide a un espectador que nos preste dos monedas, que sujetaremos entre las yemas de los dedos pulgar e índice de la mano derecha. Se frota las monedas rápidamente, para crear la imagen fantasma, al tiempo que con la mano se mantiene oculta la moneda escondida en la palma. Cuando ya se aprecie la imagen fantasma, se hace gesto de atraparla, cerrando rápidamente el puño, para después abrir la mano y demostrar que el fantasma se ha materializado, convirtiéndose en una moneda constante y sonante.