Capítulo 5
Los elegantes triángulos

Cabría suponer que el humilde triángulo fue ya tan exhaustivamente estudiado por los geómetras de la Grecia clásica, que mal podrían los siglos posteriores tener ocasión de aportar sobre ellos nuevos conocimientos de interés. Sin embargo, no es cierto. Evidentemente, el número de teoremas sobre triángulos es infinito, si bien, a partir de cierto punto, se complican tanto y se hacen tan estériles que nadie puede calificarlos de elegantes. George Polya definió en cierta ocasión la elegancia de los teoremas geométricos como «directamente proporcional al número de ideas que en ellos vemos, e inversamente proporcional al esfuerzo requerido para comprenderlas». Durante los últimos siglos se han descubierto muchos elegantes resultados sobre triángulos, tan bellos como importantes, pero con los que no es probable que se haya tropezado el lector durante su formación en geometría plana elemental. En este capítulo examinaremos solamente una porción mínima de estos teoremas, deteniéndonos un poco en aquellos que han suscitado problemas con matiz recreativo.

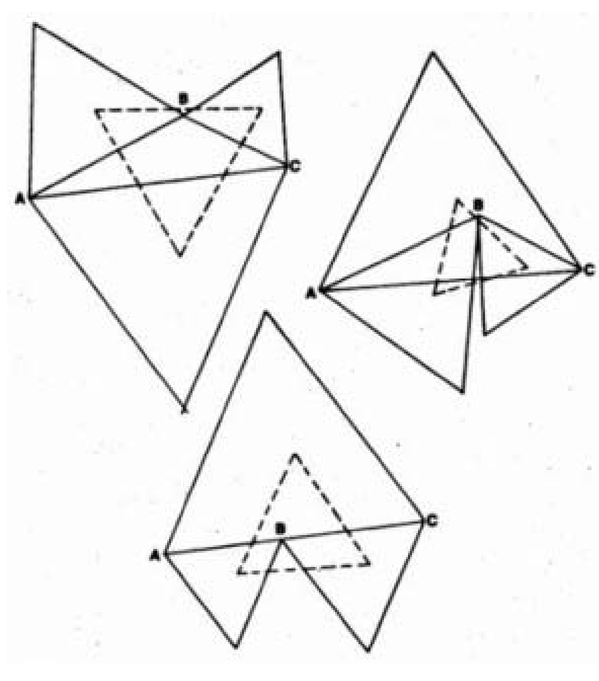

Figura 27. Al unir los centros de tres triángulos equiláteros se obtiene un cuarto (en líneas de trazos).

Comencemos por un triángulo ABC de forma arbitraria (véase la Figura 27). Sobre cada uno de sus lados se construye un triángulo equilátero, bien hacia el exterior (arriba, a la izquierda), bien hacia el interior (arriba, derecha). En ambos casos se descubre que al unir por líneas rectas (de trazos en la figura) los centros de los nuevos triángulos (estos centros pueden determinarse por intersección de dos alturas) queda construido un cuarto triángulo equilátero. (A veces, el teorema se enuncia construyendo sobre cada lado un triángulo isósceles, con ángulos de 30 grados en la base. El cuarto triángulo resulta de unir los vértices de los triángulos isósceles así construidos. Estos vértices son los centros de nuestros triángulos equiláteros, así que ambos teoremas son idénticos.) Si el triángulo ABC de partida fuese ya equilátero, los triángulos trazados hacia el interior definen un triángulo equilátero «degenerado», reducido a un punto. El teorema, que es precioso, sigue siendo válido cuando el triángulo inicial queda degenerado en un segmento rectilineo, como vemos en la parte inferior derecha de la ilustración. Ignoro quién fue el primero en descubrirlo, ha sido atribuido a Napoleón-, pero de él se han publicado en estos últimos años muchas demostraciones. Una muy poco común, basada exclusivamente en teoría de grupos y transformaciones de simetría, puede verse en *Geometric Transformations*, del matemático ruso Isaac Moisevitch Yaglom.

Otro teorema muy elegante es el famoso «de los nueve puntos», en el cual parece surgir de la nada una circunferencia, lo mismo que antes se materializaba insospechadamente un triángulo equilátero. Fue descubierto por dos matemáticos franceses, quienes lo publicaron en 1821. Dado un triángulo cualquiera, situemos en él tres ternas de puntos (véase la Figura 28).

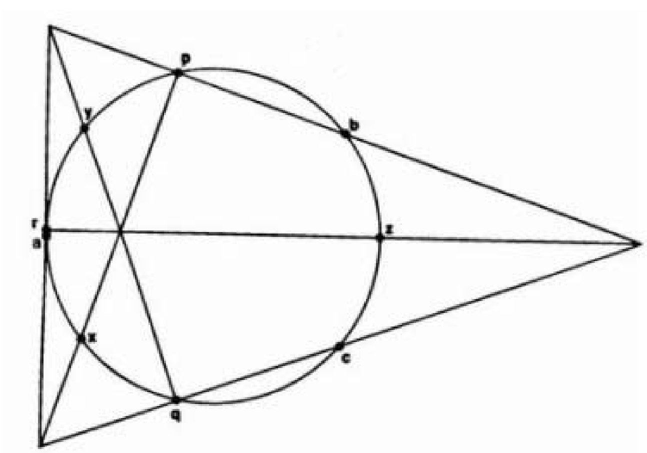

Figura 28. El teorema de los nueve puntos

1. Los puntos medios (a, b, c) de los tres lados.
2. Los pies (p, q, r) de las tres alturas.

3. Los puntos medios (x, y, z) de los segmentos rectilíneos que unen cada vértice con el ortocentro (punto de intersección de las tres alturas).

Como muestra la ilustración, estos nueve puntos yacen sobre una misma circunferencia, resultado sorprendente que abre paso a otra multitud de teoremas. Por ejemplo, no es difícil demostrar que el radio de la circunferencia trazada por estos nueve puntos es precisamente la mitad del radio de la circunferencia circunscrita al triángulo de partida. La propiedad de las alturas de cortarse en un solo punto (ortocentro) es de por sí interesante; Euclides no la menciona, y aunque Arquímedes la da a entender, parece ser que no fue enunciada explícitamente hasta Procio, filósofo y geómetra del siglo V.

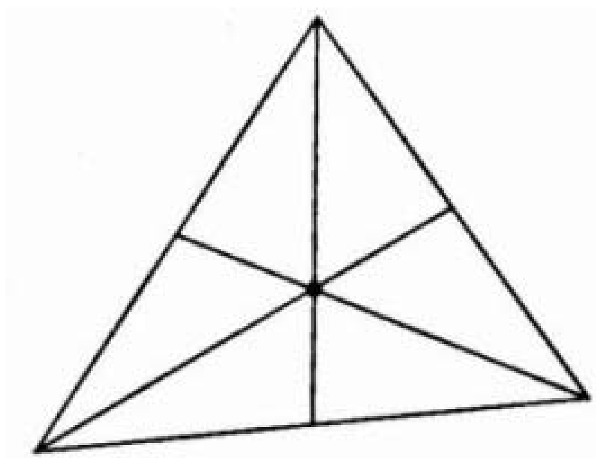

Figura 29. El baricentro triseca las medianas

En un triángulo, se llaman medianas a las rectas que unen cada vértice con el punto medio del lado opuesto (véase la Figura 29). También las medianas concurren en un punto, que se denomina baricentro (y también centroide, centro de gravedad, y centro de masas). El baricentro dista de cada lado un tercio de la longitud de la correspondiente mediana; las medianas dividen al triángulo en seis porciones triangulares de iguales áreas. Además, el baricentro o centroide es el centro de gravedad del triángulo, hecho que ya conocía Arquímedes. Es posible que el lector haya visto demostrada esta propiedad recortando en cartulina un triángulo escaleno, trazando las medianas para hallar su baricentro y sosteniéndolo en equilibrio sobre la punta del lápiz en ese punto.

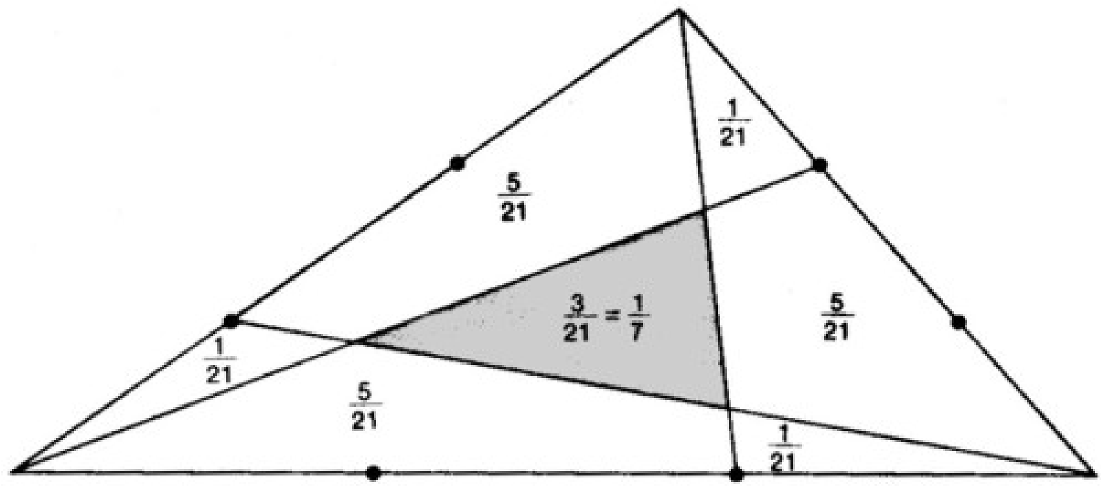

Figura 30. Cevianas trisecantes

Las medianas son casos particulares de rectas más generales, llamadas «cevianas» (en honor de un matemático italiano del siglo XVII, Giovanni Ceva). Las cevianas son rectas trazadas desde un vértice del triángulo a un punto del lado opuesto. Si en lugar de los puntos medios tomásemos en los lados los puntos de trisección, las tres cevianas que vemos en la Figura 30 dividirían al triángulo en siete regiones cuyas superficies serían todas múltiplos enteros de 1/21 del área del triángulo de partida. El triángulo central, sombreado, tiene área 3/21, o sea, 1/7. Existen muchas ingeniosas demostraciones de esta propiedad, así como de los resultados de un caso más general, donde cada lado del triángulo es dividido en n partes iguales. Si las cevianas se trazan como antes, hasta el primero de los puntos de división de cada lado, recorriendo el triángulo en sentido horario (o antihorario, si se prefiere), el triángulo central tendrá un área de $(n - 2)^2 / (n^2 - n + 1)$. En su *Introduction to Geometry* (de la que existe versión castellana, del mismo titulo) H. S. M. Coxeter estudia una generalización aún más amplia, donde cada lado del triángulo puede ser descompuesto en números arbitrarios de partes iguales. Allí se da una fórmula que se remonta a 1896, y Coxeter muestra cuán sencillamente puede ser deducida sin más que alojar el triángulo en una reticulación regular de puntos del plano.

Todo triángulo tiene tres lados y tres ángulos. Euclides estudió tres casos de congruencia de triángulos en los que ésta queda asegurada por la igualdad de ciertas ternas de elementos, por ejemplo, dos lados y el ángulo comprendido entre ambos. Pero, ¿es posible que dos triángulos tengan idénticos cinco de sus seis elementos, sin ser, pese a ello, congruentes? Puede parecer imposible a primera vista, mas resulta que hay una infinidad de pares de estos triángulos «congruentes a 5», como han sido bautizados por Richard A. Pawley. Si en un par de triángulos congruentes a 5 fuesen iguales los tres lados, los triángulos serían totalmente congruentes; por lo tanto, la única situación en que puede darse la no - congruencia es la igualdad de los tres ángulos y de dos lados. Cuando se exige, además, que los lados de los triángulos vengan todos dados por números enteros, el ejemplo mínimo será el que vemos en la Figura 31.

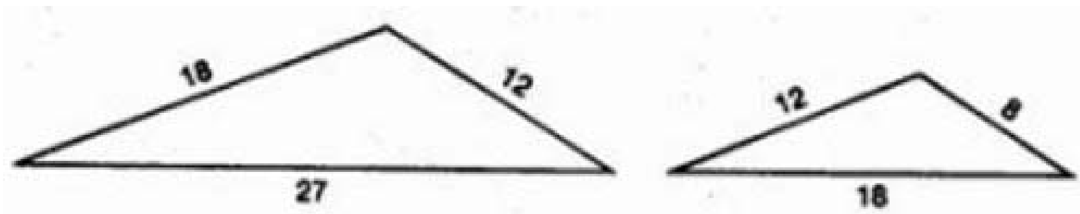

Figura 31. El par de triángulos mínimos "congruentes a 5".

Observemos que los lados de 12 y 18 unidades, aunque de longitud igual, no son lados homólogos. Los triángulos son forzosamente semejantes, porque los ángulos homólogos sí son respectivamente iguales; pero no son congruentes. El problema de hallar todos los pares de triángulos como éstos guarda íntima relación con el problema de la razón áurea.

Existen muchas fórmulas, conocidas desde antiguo, para hallar los lados, ángulos, el área, etc., de un triángulo, conocidos ciertos datos sobre sus alturas, medianas, etc. La expresión

$$\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

donde *a, b* y *c* son las longitudes de los lados del triángulo y *s* es el semi - perímetro, es decir, la mitad de la suma de longitudes de los lados, da el área del triángulo. Esta fórmula, tan sorprendente como sencilla, fue demostrada por vez primera en la Métrica de Herón de Alejandría, quien vivió en los siglos I o II después de Cristo. La fórmula, que constituye el principal mérito matemático de Herón, es fácil de demostrar con ayuda de trigonometría. En nuestros días, el renombre de Herón se debe, sobre todo, a sus deliciosos tratados sobre autómatas griegos y juguetes hidráulicos, como la paradójica «fuente de Herón» donde un chorro de agua parece desafiar la ley de la gravedad, pues brota más alta que su venero.

Hay un problema clásico, de origen desconocido, para cuya solución es necesario valerse de la semejanza de triángulos y que se ha hecho muy famoso; como mi corresponsal Dudley F. Church ha expresado con tino, «su atractivo reside en que, a primera vista, parece prometer solución sencilla, para enseguida convertirse en una pesadilla algebraica». El problema habla de dos escaleras de peldaños, de distinta longitud, que se cruzan como muestra la Figura 32. (Si las escaleras fuesen de igual longitud, el problema seria trivial.)

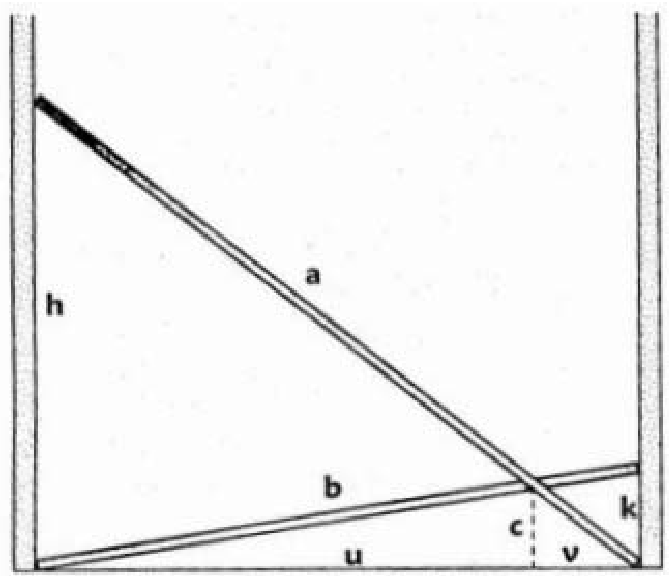

Figura 32. El problema de las escaleras cruzadas

Las dos escaleras se apoyan contra las paredes de sendos edificios. Dadas las longitudes de las escaleras y la altura de su punto de cruce, ¿qué distancia separa los edificios? Los tres valores dados difieren ampliamente de unas versiones a otras. Tomaremos aquí un ejemplo típico, extraído de *One Hundred Mathematical Curiosities*, de William R. Ransom. Las escaleras, de longitud 100 unidades (a) y 80 (b) se cruzan a 10 unidades (c) sobre el suelo. Planteando relaciones de semejanza, Ransom consigue la ecuación

$$k^4 - 2ck^3 + k^2(a^2 - b^2) - 2ck(a^2 - b^2) + c^2(a^2 - b^2) = 0$$

que en este caso particular da

$$k^4 - 20k^3 + 3.600k^2 - 72.000k + 360.000 = 0$$

Esta ecuación de ominoso aspecto es una cuártica, y para resolverla, lo mejor es emplear algún procedimiento de aproximaciones sucesivas, por ejemplo el método de Horner. Resulta así que k vale aproximadamente 11,954, de donde ya cuesta poco deducir la separación entre muros ($u + v$), que es 79,10 +. Hay otras muchas formas de enfocar el problema, que conducen a ecuaciones semejantes.

Se plantea ahora una cuestión difícil. ¿Habrá versiones del problema (suponiendo siempre escaleras de distinta longitud) donde todos los segmentos nombrados en la Figura 32 tengan longitudes enteras? Que yo tenga noticia, el primero en resolver esta cuestión fue Alfred A.

Bennett, en 1941. Desde entonces, sus soluciones han sido redescubiertas muchas otras veces. La solución más sencilla (pues hace mínimas tanto la altura del cruce como la separación entre muros) corresponde a escaleras de longitudes 119 y 70 unidades, con altura en el cruce de 30 unidades y anchura de 56. Además, el conjunto de soluciones enteras es infinito. Hay también infinitas soluciones donde no sólo son enteras las cantidades ya mencionadas, sino asimismo la distancia que separa los extremos más altos de las escaleras. (Véase la solución de Gerald J. Janusz.)

Si tan sólo se requiere que sean enteras las longitudes de las escaleras, la distancia entre edificios y la altura del cruce, tendremos libertad para buscar soluciones que hagan mínimos otros valores. H. G. ApSimon me ha enviado el análisis más completo que conozco. La solución que hace mínima la separación entre paredes es 40 para esta incógnita, 38 para la altura del cruce, y 58 y 401 para las escaleras. La altura de cruce alcanza el mínimo de 14 cuando la anchura entre edificios es 112, y las escaleras miden 113 y 238. (Estas dos soluciones habían sido ya descubiertas con anterioridad por John W. Harris.) La solución que logra hacer mínima la longitud de la mayor de las escaleras es 63 para el vano entre edificios, 38 para la altura del cruce, y 87 y 105 para las escaleras. La solución que hace mínima la longitud de la escalera pequeña es 40 para la separación entre edificios, 38 para la altura de cruce, y 58 y 401 para las escaleras.

ApSimon buscó también una solución que hiciera mínima la diferencia de longitudes de las escaleras. La mejor de las soluciones que consiguió fue de 1540 para el vano entre muros, 272 para la altura de cruce, y escaleras de longitudes 1639 y 1628, con diferencia de 11 unidades.

Empero, no consiguió demostrar que su solución fuese mínima.

Si tan sólo se nos dan las distancias desde un punto a los tres vértices de un triángulo, es evidente que habrá infinitos triángulos que satisfagan estas condiciones de distancia. Empero, si se exige que el triángulo sea equilátero, estas tres distancias pueden determinar unívocamente el lado del triángulo. El punto dado puede encontrarse en el interior del triángulo, en el exterior, o sobre uno de sus lados. Los lectores me envían a menudo un antiguo problema de este tipo, que por lo común presenta la siguiente forma: Un punto situado en el interior de un triángulo equilátero dista de los vértices 3, 4 y 5 unidades. ¿Cuánto mide el lado del triángulo?

Soluciones

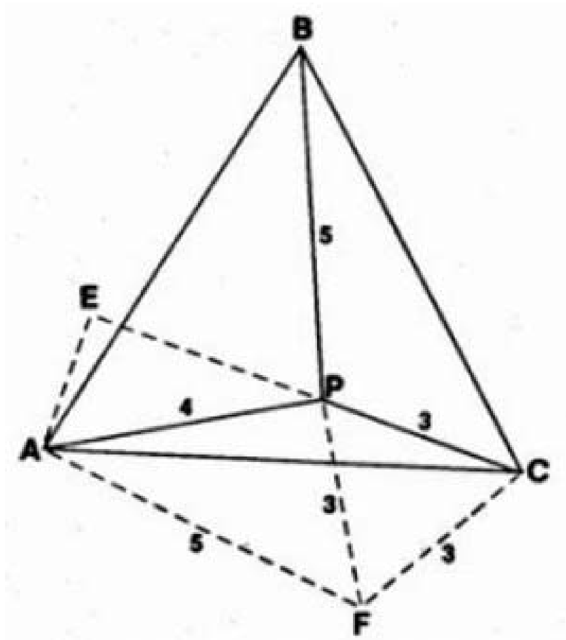

Figura 33. Solución al problema de las tres distancias

El problema pedía hallar el lado de un triángulo equilátero, sabiendo que contiene un punto que dista de sus vértices 3, 4 y 5 unidades. La solución aquí presentada se debe a Charles W. Trigg, en *Mathematical Quickies*. Las líneas de trazos de la Figura 33 están construidas de forma que *PCF* sea un triángulo equilátero, y *AE* sea perpendicular a la prolongación de *PC* hacia la izquierda. El ángulo *PCB* = 60 grados, menos el ángulo *PCA* = ángulo *ACF*. Los triángulos *PCB* y *FCA* son por este motivo congruentes *AF* = 5. En vista de que *APF* es rectángulo, el ángulo *APE* = 180 - 60 - 90 = 30 grados. De aquí deducimos que *AE* mide 2, y que *EP* es la raíz cuadrada de 3. Podemos ahora plantear la igualdad

$$AC = \sqrt{2^2 + (3 + 2\sqrt{3})^2} = \sqrt{25 + 12\sqrt{3}}$$

de donde obtenemos que el lado del triángulo, *AC* tiene el valor de 6,766 +.

Hay una fórmula, de preciosa simetría, que permite calcular el lado de un triángulo equilátero, conocidas las distancias desde un punto a sus vértices:

$$3(a^4 + b^4 + c^4 + d^4) = (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)^2$$

Tomando cualesquiera tres de estas incógnitas como distancias a los vértices, basta despejar la cuarta para tener el lado del triángulo. Entre las soluciones con valores enteros, la más sencilla es 3, 5, 7, 8. El punto estará situado en el exterior del triángulo salvo en el caso de lado 8; en tal caso yacerá sobre un lado. Varios lectores me han enviado demostraciones de que en los tres casos (punto en el interior, sobre un lado, o exterior) hay infinitas soluciones primitivas (es decir, soluciones sin divisores comunes), con valores enteros. Cuando el punto es interior, la más sencilla es 57, 65 y 73 para las distancias, y 112 para el lado del triángulo. La siguiente, 73, 88, 95 y 147.