Capítulo 10
Números cíclicos

El número 142.857, que los numerólogos y aficionados a la aritmética recreativa sin duda habrán reconocido en el acto, es uno de los enteros más curiosos. Pues, aparte del número 1, donde la propiedad es trivial, es el mínimo de los «números cíclicos». Un número cíclico es un entero de *n* cifras que presenta la insólita característica de que al multiplicarlo por cualquiera de los números comprendidos entre 1 y *n*, ambos inclusive, el producto tiene *n* cifras, las mismas que el multiplicando primitivo, y en el mismo orden cíclico. Imaginemos un collar, cuyas cuentas fuesen los números 142.857. Podemos abrir el collar por seis sitios; al estirarlo formaremos seis números de seis cifras, que son las seis permutaciones cíclicas del número escrito:

1 x 142.857 = 142.857
2 x 142.857 = 285.714
3 x 142.857 = 428.571
4 x 142.857 = 571.428
5 x 142.857 = 714.285
6 x 142.857 = 857.142

La naturaleza cíclica de estos seis productos ha venido intrigando desde hace mucho a los ilusionistas. Muchos finos trucos de predicción matemática se inspiran en ellos. He aquí uno: preparamos una baraja francesa, de 52 naipes, empezando por separar las nueve picas cuyo valor se expresa con una sola cifra. Estas cartas son colocadas en la parte inferior del mazo, de manera que su orden, de abajo a arriba, sea 142857; a continuación van las tres cartas restantes, en orden cualquiera. Anunciamos que el resultado de nuestro acto mágico será el número 142.857, que aparecerá escrito con grandes cifras en una tira de papel metida en un sobre cerrado. Cortamos una tira de papel de longitud doble que la del sobre que haya de contenerla, escribimos en ella las cifras ya dichas y pegamos sus extremos, formando así una faja circular. Después la aplanamos, como muestra la Figura 48, y así plegada la metemos en el sobre, que cerramos y pegamos.
Como es obvio, tenemos que saber de memoria el número 142.857 y también recordar que sus tres primeras cifras están en la mitad superior de la banda, y las otras tres, en la mitad inferior. Más tarde abriremos el sobre, cortándolo con unas tijeras por uno de los cuatro lugares marcados A, B, C, D. Si se corta por A o por D, córtese también la extremidad de la

banda de papel, con lo cual, al extraerla, quedará una tira rectangular que mostrará el número 142.857 o bien el 857.142.

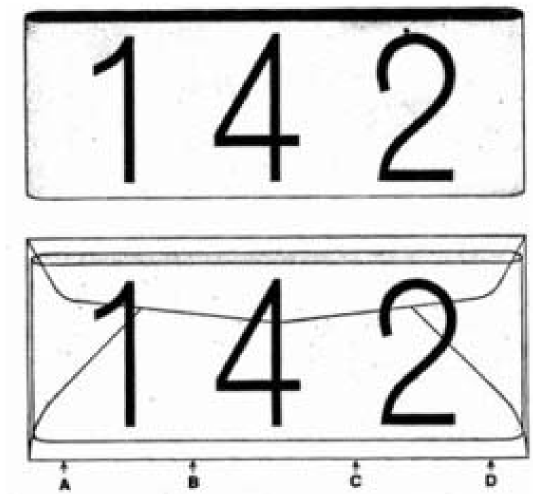

Figura 48. Con esta banda sin fin (arriba), encerrada en un sobre (abajo) podemos realizar un truco de predicción

Las otras cuatro permutaciones cíclicas se obtienen abriendo el sobre por B o C, como se explica. Hay que empezar cortando solamente el sobre, por debajo de la tira de papel; pero conforme avanza el corte, hay que tener cuidado para introducir la punta de las tijeras por medio de la banda, cortando así solamente la parte superior de la cinta de papel y el anverso del sobre. Así abrimos una rendija, por donde podremos extraer una tira de papel que portará uno de los números 428.571 ó 285.714. Para obtener las otras dos permutaciones basta proceder de igual manera por el reverso del sobre. La idea de cortar el sobre y extraer de él una tira de papel que exhiba una de las seis permutaciones cíclicas de 142.857 está inspirada en un sistema inventado por Samuel Schwartz, un abogado neoyorquino, ilusionista aficionado. Schwartz se vale de un sobre comercial, de los que muestran una ventana transparente, por la cual los espectadores pueden ir viendo las cifras; además, su forma de preparar el mazo es ligeramente distinta, pero su método es, en esencia, idéntico al explicado.

Al empezar el truco se le entrega a uno de los espectadores el sobre que contiene nuestra predicción. Le damos a otra persona el mazo ya preparado, y le pedimos que lo baraje a fondo, «peinándolo» dos veces. (Es decir, el mazo se divide en dos partes sensiblemente iguales, y las cartas se mezclan dejándolas escurrir de los pulgares.) El doble peinado hará que las nueve cartas queden repartidas por el interior de la baraja, haciéndolas subir dentro del mazo, pero sin modificar el orden de las picas. Seguidamente, le explicamos al auditorio que vamos a construir un número de seis cifras sacadas al azar, y que para ello volveremos el mazo boca arriba y tomaremos las seis primeras picas cuyo valor sea de una sola cifra. Naturalmente, las cifras resultan ser 142.857. Colocamos estas cartas en hilera, sobre la mesa, y lanzamos un dado para tener también un multiplicador sacado al azar, de 1 a 6. Todavía mejor: podemos darle a un espectador un dado imaginario, pedirle que lo «lance» y nos diga la puntuación que «ve» en su cara superior. Se multiplica 142.857 por el número que nos diga. Se abre entonces el sobre por el lugar oportuno (para saberlo, se multiplica la cifra que nos digan por 7 y se toma la cifra de unidades del producto), y se saca a la vista la tira de papel, para dejar de manifiesto la exactitud de nuestra predicción.

El número 142.857 interviene en otros muchos trucos de ilusionismo. Pueden verse algunas referencias en la bibliografía, al final del libro. Todos ellos, empero, tienen el defecto de que los espectadores pueden acabar dándose cuenta de que en la predicción siempre se repiten las cifras de 142.857. Por otra parte, este número es ya muy conocido. Una manera de evitar esta dificultad consiste en valerse no de 142.857, sino del cociente resultante de dividirlo entre alguno de sus factores. Por ejemplo, 142.857/3 = 47.619. Ahora, en lugar de hacer multiplicar 47.619 por 1, 2, 3, 4, 5 ó 6, como antes, lo haremos multiplicar por alguno de los seis primeros múltiplos de 3. El resultado, desde luego, será nuevamente permutación cíclica de 142.857. Podemos usar también 142.857/9 = 15.873 y hacer multiplicar este último por cualquiera de los seis primeros múltiplos de 9; o bien, tomar 142.857/11 = 12.987 y hacerlo multiplicar por 11, 22, 33, 44, 55 ó 66... y así sucesivamente.

Hace muchos siglos, cuando los matemáticos cayeron en la cuenta del carácter cíclico de 142.857, empezaron a buscar otros números más grandes que tuvieran esta misma antojadiza propiedad. Los primeros trabajos encaminados a este fin pueden verse, resumidos, en el primer volumen de *History of Theory of Numbers*, de Leonard Eugene Dickson, Capítulo 6; desde los tiempos de la primera edición del Dickson, en 1919, se han escrito docenas de artículos dedicados al tema. Resulta que todos los números cíclicos son los periodos (que algunos llaman repetendos, es decir, el bloque mínimo de cifras decimales que van repitiéndose sistemática e indefinidamente) de la expresión decimal de las fracciones recíprocas de ciertos números primos. La fracción recíproca de 7, esto es, 1/7, genera el decimal ilimitado 0,142 857 142 857 142 857... Observemos que el número de cifras del período es de una menos que 7, denominador de la fracción generatriz. Tenemos así un procedimiento para descubrir otros números cíclicos mayores. En el caso de $1/p$, siendo p un número primo, si se produjese un decimal periódico cuyo período estuviera compuesto por p, 1 cifras, tal período sería número cíclico. El mínimo número primo siguiente que genera números así es 17. Su período es el cíclico 0, 588 235 294 117 647, que consta de 16 cifras. Multiplicado este número por cualquier otro comprendido entre 1 y

16, ambos inclusive, se reproducen en el producto los 16 dígitos anteriores, y en el mismo orden cíclico. Todos los números cíclicos engendrados por primos mayores que 7 han de empezar por uno o varios ceros. En el caso de que los utilicemos para trucos de predicción o exhibiciones de cálculo rápido, podremos prescindir de los ceros iniciales, acordándonos luego de insertarlos en los lugares oportunos del producto definitivo.

Entre los números primos menores que 100 hay exactamente nueve que generen números cíclicos, a saber, 7, 17, 19, 23, 29, 47, 59, 61, 97. Durante el siglo pasado se descubrieron otros muchos números cíclicos, de longitudes muy superiores. William Shanks, famoso por haber calculado las primeras 707 cifras decimales de π (cometiendo un error en la de lugar 528, y sucesivas), descubrió un número cíclico generado por 1/17.389, y determinó (correctamente) sus 17.388 cifras.

Ninguna fracción con denominador *d* puede tener período formado por más de *d* - 1 cifras. Para lograr estos períodos de longitud máxima es condición necesaria que *d* sea primo. Resulta así que los números cíclicos equivalen a períodos de longitud máxima de recíprocos de números enteros. Es fácil comprender por qué la máxima longitud del período es *d* - 1. Al ir dividiendo 1,000... entre *d*, en cada etapa del proceso de división hay solamente *d*, 1 restos posibles (distintos de 0); tan pronto se repita un resto comenzarán a repetirse las cifras del cociente, y aparecerá el período. Por consiguiente, ninguna fracción con denominador *d* puede tener períodos de más de d - 1 cifras. También es fácil ver el motivo de que estos períodos de longitud máxima sean cíclicos. Fijémonos, por ejemplo, en 8/17. Puesto que al dividir 1/17 se presentan ya todos los restos posibles, al dividir 8 entre 17 no hacemos más que comenzar el proceso cíclico en lugar diferente. Es seguro entonces que obtendremos en el periodo del nuevo número decimal las mismas cifras que antes, y en el mismo orden cíclico. Al multiplicar por 8 el número cíclico generado por 1/17 no hacemos más que hallar el período de 8/17; por lo tanto, el producto tendrá que ser permutación cíclica de los mismos 16 dígitos que forman el periodo de 1/17.

No se dispone de ninguna fórmula explícita no recursiva, capaz de generar automáticamente todos los números primos cuyas fracciones recíprocas tengan períodos de longitud máxima (y así pues, generar todos los números cíclicos), pero sí hay muchas mañas que simplifican grandemente la tarea de identificar tales primos y de preparar programas de ordenador que puedan determinarlos. No se sabe todavía si existirán infinitos primos capaces de generar números cíclicos, pero tal conjetura parece bastante verosímil. En la valiosa tabla de períodos de los recíprocos de los números primos, preparada por Samuel Yates, y que incluye todos los números primos menores o iguales que 1.370.471 (véase la bibliografía), alrededor de las tres octavas partes de los números primos allí estudiados son de nuestro tipo. La proporción permanece sensiblemente constante al ir tomando muestras de distintos segmentos de la tabla, por lo que la conjetura de validez para todos los números primos no parece descabellada.

Al multiplicar un número cíclico por el primo que lo engendra, el producto es siempre una hilera de nueves. Por ejemplo, 7 por 142.857 es 999.999. Disponemos entonces de otro método para buscar números cíclicos: se toma el número *p*, primo, y se va dividiendo una hilera de nueves entre *p*, hasta lograr resto 0. En el caso de que el cociente tenga *p* - 1 cifras, resultará ser cíclico. Todavía más inesperada es la propiedad de que al escindir por la mitad el bloque de cifras que componen el número cíclico (o cualquiera de sus permutaciones circulares) los dos números resultantes dan al sumarlos una hilera de 9s. Por ejemplo, 142 + 857 = 999. Veamos otro ejemplo. Separamos en dos bloques el número cíclico engendrado por 1/17, y sumamos las mitades:

$$\begin{array}{r} 05.882.352 \\ \underline{94.117.647} \\ 99.999.999 \end{array}$$

Tan sorprendente propiedad es caso particular del «teorema de Midy», atribuido por Dickson a E. Midy, quien lo dio a conocer en Francia, en 1836. El teorema de Midy enuncia que si el periodo de la expresión decimal de *a/p* (siendo *p* número primo) consta de número par de dígitos, entonces, la suma de los dos números obtenidos al escindir el periodo en dos bloques iguales será una hilera de nueves. Hay números primos, el 11, por ejemplo, cuyos períodos tienen longitud par, no son cíclicos, y cumplen la propiedad de los nueves. Hay otros números primos, como el 3 y el 31, cuyas fracciones recíprocas tienen períodos de longitud impar. Ahora bien, todos los números cíclicos son de longitud par, y por este motivo el teorema de Midy se cumplirá en todos ellos. Es propiedad que conviene recordar, porque al tantear con algún primo para ver si genera un número cíclico por el método de la división será suficiente hacerla hasta la mitad. Las cifras que faltan pueden obtenerse rápidamente, sin más que tomar los complementos a 9 de las ya obtenidas. Evidentemente, resulta también del teorema de Midy que todos los números cíclicos habrán de ser múltiplos de 9, pues está claro que lo es la suma de sus cifras. Los lectores a quienes interese una demostración elemental del teorema de Midy pueden consultar *The Enjoyment of Mathematics*, por Hans Rademacher y Otto Toeplitz (*Princeton University Press*, 1957), pp. 158-60 [Hay traducción española, *Números y figuras*, Alianza Editorial, Madrid, 1970].

Puede verse otra demostración, debida a W. G. Leavitt, «A Theorem on Repeating Decimals», en *The American Mathematical Monthly*, junio-julio de 1967, pp. 669-73.

Los números cíclicos tienen otras muchas extrañas propiedades; quizá el lector pueda tener el placer de descubrir algunas por sí mismo. Tan sólo mencionaré otra más. Todo número cíclico puede ser engendrado de multitud de formas como suma de una progresión geométrica infinita, escrita en diagonal. Por ejemplo, tomemos 14 como valor inicial, y vayamos duplicándolo en cada paso, escribiendo los números resultantes de forma que sobresalgan cada vez dos cifras hacia la derecha:

```
14
  28
    56
    1 12
       2 24
          4 48
             8 96
                 ...
                   ...
                     ...
_________________________
14 28 57 14 28 57 ...
```

En la suma va repitiéndose el número cíclico mínimo (no trivial). Otro procedimiento para obtener el mismo número cíclico es empezar por 7 e ir moviéndose uniformemente hacia la izquierda, multiplicando en cada paso por 5 el número anterior, y conservando las cantidades obtenidas uniformemente ceñidas a la diagonal por su lado derecho:

```
                  7
                3 5
              1 7 5
            8 7 5
        4 3 7 5
    2 1 8 7 5
1 0 9 3 7 5
.............
_______________________
............7 1 4 2 8 5 7
```

Con el mismo procedimiento, pero usando esta vez la progresión geométrica de razón 2 : 1, 2, 4, 8, 16, 32, ... se obtendrá el periodo de 1/19, que es el tercero de los números cíclicos: 052.631.578.947.368.421. En cambio, la progresión geométrica de razón 3 : 1, 01, 03, 09, 27, 81... escrita diagonalmente hacia la derecha en sentido descendente, con cada número sobresaliendo dos cifras más que su precedente, da una suma que va repitiendo el período de 1/97, el mayor de los números cíclicos generados por números primos menores que 100. Terminaré esta breve exposición, donde tan sólo se han tocado una parte mínima de las propiedades de los números cíclicos, preguntando al lector qué propiedades de carácter cíclico puede descubrir en el período de 1/13. Este, que es 076.923, no es verdaderamente cíclico, aunque podríamos llamarlo cíclico de orden 2. La solución abrirá nuevos campos, íntimamente relacionados con los cíclicos de orden 1, que son los que hemos comentado.

Apéndice

John W. Ward me informó sobre el cuadrado mágico perfecto que vemos en la *Figura 49*. Este cuadrado se encuentra en la página 176 de *Magic Squares and Cubes*, una obra de W. S. Andrews que data de 1917, hoy disponible en *Dover Paperbacks*. El cuadrado se basa en el número cíclico generado al desarrollar la fracción 1/19. Todas las filas, columnas y diagonales principales dan suma 81.

1/19 =	.0	5	2	6	3	1	5	7	8	9	4	7	3	6	8	4	2	1
2/19 =	.1	0	5	2	6	3	1	5	7	8	9	4	7	3	6	8	4	2
3/19 =	.1	5	7	8	9	4	7	3	6	8	4	2	1	0	5	2	6	3
4/19 =	.2	1	0	5	2	6	3	1	5	7	8	9	4	7	3	6	8	4
5/19 =	.2	6	3	1	5	7	8	9	4	7	3	6	8	4	2	1	0	5
6/19 =	.3	1	5	7	8	9	4	7	3	6	8	4	2	1	0	5	2	6
7/19 =	.3	6	8	4	2	1	0	5	2	6	3	1	5	7	8	9	4	7
8/19 =	.4	2	1	0	5	2	6	3	1	5	7	8	9	4	7	3	6	8
9/19 =	.4	7	3	6	8	4	2	1	0	5	2	6	3	1	5	7	8	9
10/19 =	.5	2	6	3	1	5	7	8	9	4	7	3	6	8	4	2	1	0
11/19 =	.5	7	8	9	4	7	3	6	8	4	2	1	0	5	2	6	3	1
12/19 =	.6	3	1	5	7	8	9	4	7	3	6	8	4	2	1	0	5	2
13/19 =	.6	8	4	2	1	0	5	2	6	3	1	5	7	8	9	4	7	3
14/19 =	.7	3	6	8	4	2	1	0	5	2	6	3	1	5	7	8	9	4
15/19 =	.7	8	9	4	7	3	6	8	4	2	1	0	5	2	6	3	1	5
16/19 =	.8	4	2	1	0	5	2	6	3	1	5	7	8	9	4	7	3	6
17/19 =	.8	9	4	7	3	6	8	4	2	1	0	5	2	6	3	1	5	7
18/19 =	.9	4	7	3	6	8	4	2	1	0	5	2	6	3	1	5	7	8

Figura 49. El único cuadrado mágico engendrado por un número cíclico

Casi salta a la vista que todo número cíclico dará un cuadrado mágico respecto de filas y columnas; pero Ward descubrió que el mostrado se distingue por serlo también respecto de sus dos diagonales principales. Como dice el propio Andrews, «No es fácil comprender la razón de que cada una de las diagonales mayores tenga suma 81; de todas formas, al escribir una encima de la otra vernos que cada par de números correspondientes suma 9».
Ward ha demostrado también que en todos los cuadrados semiperfectos basados en números cíclicos, la suma de los números obtenidos al sumar las cifras de cada diagonal es siempre doble de la constante mágica.
Muchos lectores se preguntaron e investigaron qué sucede al multiplicar números cíclicos de orden 1 por números mayores que el número *n* de sus cifras. Se obtiene un resultado bastante grato, a saber, que en todos los casos así el producto puede acabar reduciéndose, bien a una permutación cíclica del número inicial, bien a una serie de *n* nueves. Mostraré lo que sucede con 142.857, y quedará claro cómo generalizar la propiedad a cíclicos mayores.
Fijémonos primero en todos los multiplicadores mayores que *n* que no sean múltiplos de *n* - 1. Por ejemplo, 142.857 x 123 = 17.571.411. Separemos las seis últimas cifras, y al número que forman sumémosle el definido por los dos restantes:

$$\begin{array}{r} 571.411 \\ \underline{17} \\ 571.428 \end{array}$$

La suma es permutación cíclica de 142.857. Veamos otro ejemplo:

$$142.857^2 = 20.408.122.449.$$

$$\begin{array}{r} 20408 \\ \underline{122449} \\ 142857 \end{array}$$

Cuando el multiplicador sea muy grande, comenzamos desde la derecha y vamos escindiendo el número en bloques de seis cifras cada una. Por ejemplo:

142.857 x 6.430.514.712.336.

$$\begin{array}{r} 183952 \\ 040260 \\ \underline{918644} \end{array}$$

1142856

En vista de que la suma tiene más de seis dígitos, iteramos el procedimiento;

 142856

<u>   1</u>

 142857

Cuando el multiplicador del número cíclico sea múltiplo de *n* - 1 (siendo *n* el número de dígitos del cíclico), el proceso recién descrito producirá una hilera de nueves. Por ejemplo, 142.857 x 84 = 11.999.988.

999.988

<u>   11</u>

999.999

El lector descubrirá sin ningún esfuerzo cómo aplicar el procedimiento a cíclicos de orden superior.

Ratner's Star, novela de Don DeLillo (Knopf, 1976), está salpicada de referencias a 142.857 y a sus muchas sorprendentes propiedades numerológicas. Su protagonista es Billy Twillig, un matemático prodigio de 14 años, nacido en el Bronx neoyorquino. En la novela, Billy es contratado por el Gobierno Federal, en 1979, para una misión de máximo secreto: tratar de averiguar por qué una estrella distante perteneciente a la Vía Láctea está enviando a la Tierra el número 14, 28, 57, codificado en impulsos. Resulta finalmente que tal número quiere decir... Bueno, lo mejor será que lean la novela y se enteren por sí mismos.

Soluciones

El período de 1/13, que es 076.923, no es número cíclico en el sentido definido anteriormente. Empero, podríamos decir que el número es cíclico doble, en el sentido que vamos a explicar. Al multiplicarlo por cualquiera de los números de 1 a 12, la mitad de los productos son las seis permutaciones cíclicas de 076.923; la otra mitad corresponde a las permutaciones de 153.846. Observemos que en cada uno de estos números (al igual que en 142.857, mínimo cíclico de orden 1) las dos mitades que se producen al escindir sus cifras por el centro dan suma 999. Además, todos los números mencionados pueden romperse en tres tercios que sumados dan 99 (07 + 69 + 23 = 99; 15 + 38 + 46 = 99; 14 + 28 + 57 = 99).

Cuando un número de *n* cifras, al ser multiplicado por los números de 1 a 2*n*, engendra productos que son todos permutación cíclica de uno de dos números de *n* cifras, se dirá que el número es cíclico de orden 2. Desechado el caso trivial, generado por 1/3, se observa que el mínimo número primo capaz de generar un cíclico de orden 2 es 13. Otros números primos menores que 100, con esta misma propiedad, son 31, 43, 67, 71, 83 y 89.

No hay dificultad en definir números cíclicos de orden cualquiera. El mínimo de los primos que generan cíclicos de tercer orden es 103. El período de 1/103, al ser multiplicado por cualquier entero de 1 a 102, da tres tipos de productos; cada tipo contiene las 34 permutaciones cíclicas de un número de 34 cifras. El más pequeño de los primos que generan cíclicos de orden 4 es 53. En general, como ha hecho ver H. J. A. Dartnall, un corresponsal londinense, si la fracción recíproca de un número primo tiene período de longitud (número de cifras) igual a (*p* - 1)/*n*, el período es cíclico de orden *n* (siendo *p* el número primo). Por ejemplo, 1/37 engendra un período de tres cifras: 027. Dado que 36/3 = 12, este período es cíclico de orden 12. Los mínimos números primos que generan cíclicos de órdenes 5 a 15 son, respectivamente, 11, 79, 211, 41, 73, 281, 353, 37, 2393, 449, 3061. Observemos que los 10 productos del cíclico de orden cinco 09 (que es el periodo de 1/11) son los 10 primeros múltiplos de 9.

Existe una curiosa relación entre los números de Fibonacci y el cíclico de orden 2 engendrado por 89. Empezando por 0, escribamos la sucesión de Fibonacci en la forma diagonal que vemos abajo, ciñendo por la derecha los números de la sucesión a la diagonal

```
0
  1
    1
      2
        3
          5
            8
            1 3
              2 1
                3  4
                   5  5
                      8  9
                      1  4  4
                         2  3 3
                            3 3 7
                                .....
                                  ..

0 1 1 2 3 5 9 5 5 05 61 ...  ...  .......
```

La suma es la parte decimal de la fracción recíproca de 89.

El tema de los números cíclicos de orden mayor que 1 es una espesa jungla, y la literatura dedicada a él se encuentra dispersa acá y allá, estando por hacerse una bibliografía sistemática. Idénticas observaciones valen para los números cíclicos de base distinta de 10.

Cada base de numeración contiene números de este tipo; en el binario, por ejemplo, la sucesión de primos generadores de cíclicos de primer orden empieza así (en notación decimal): 3, 5, 11, 13, 19, 29...