Capítulo 8
Algebra de Boole

Aunque Aristóteles se limitó casi exclusivamente al estudio del silogismo, a él es preciso atribuir todo el mérito de la fundación de la lógica formal. En nuestros días, el silogismo no es más que un capítulo trivial de la lógica. Cuesta trabajo creer que durante 2.000 años fuese tema principal de los estudios lógicos, y que en fecha tan tardía como 1797, nada menos que Immanuel Kant pudiese escribir que la lógica era «un cuerpo de doctrina cerrado y completo».

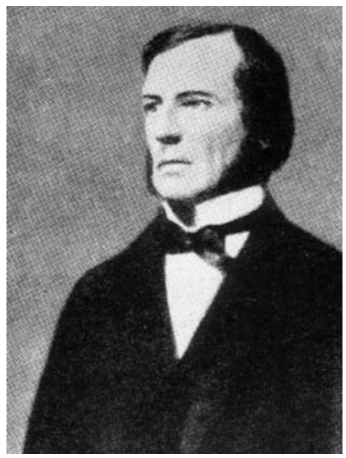

Figura 40. George Boole

«En la inferencia silogística», escribió en cierta ocasión Bertrand Russell «se supone que uno sabe ya que todos los hombres son mortales y que Sócrates es un hombre; y de ahí uno deduce lo que jamás había sospechado, a saber, que Sócrates es mortal. Esta forma de inferencia se da realmente, aunque muy raras veces». Russell continúa explicando que el único ejemplo del que tuvo noticia le llegó a través de un número satírico de *Mind*, una revista inglesa dedicada a temas filosóficos, en un número especial preparado por la redacción para celebrar las navidades de 1901. Allí, un filósofo alemán, mirando perplejo los anuncios de la revista, terminó por razonar así: «En esta revista todo es broma; los anuncios se encuentran en la revista. Por consiguiente, los anuncios son pura broma.» En otro lugar, Russell escribió también: «Si tiene usted la intención de dedicarse a la lógica, he aquí un buen consejo en el que nunca insistiré bastante: no estudie la lógica tradicional. En los tiempos de Aristóteles fue sin duda un esfuerzo meritorio. Pero lo mismo podemos decir de la astronomía ptolemaica.»

El cambio crucial se produjo en 1847. En esa fecha, George Boole (1815 - 1864), hombre modesto y autodidacta, hijo de un humilde zapatero inglés (véase la Figura 40) publicó *The Mathematical Analysis of Logic*. Este y otros trabajos fueron motivo de su nombramiento como profesor de matemáticas (pese a carecer de títulos universitarios) del *Queens College* (hoy *University College*) de Cork, en Irlanda. Allí escribió su tratado *An Investigation of the Laws of Thought, on Which are Founded the Mathematical Theories of Logic and Probabilities* (Londres, 1854). La idea fundamental: sustituir por símbolos todas las palabras utilizadas en lógica formal, ya se les había ocurrido antes a otros, pero Boole fue el primero en conseguir un sistema operativo. Con raras excepciones, ni filósofos ni matemáticos prestaron mucho interés a logro tan notable. Quizá fuera ésta una de las razones de la tolerancia que Boole mostraba por los matemáticos más excéntricos. Boole escribió un artículo sobre un chiflado de Cork, de nombre John Walsh (*Philosophícal Magazine*, noviembre de 1851), que Augustus de Morgan, en su *Budget of Paradoxes*, califica de «la mejor biografía que conozco sobre héroes de este género».

Boole murió de una neumonía, cuando contaba 49 años. Su enfermedad fue atribuida a un enfriamiento, por dar una lección magistral con la ropa mojada a consecuencia de un chaparrón. Dejó esposa y cinco hijas. Gracias a Norman Gridgeman («In Praise of Boole», véase la bibliografía) hemos podido conocer algunos detalles fascinantes sobre estas seis mujeres. Mary Everest, esposa de Boole, divulgó por escrito las ideas de su marido sobre matemáticas y pedagogía. Uno de ellos se titula *The Philosophy and Fun of AIgebra*. La mayor de las hijas, Mary, se casó con Charles Hinton, matemático que escribió la primera novela sobre Planilandia (véase el Capítulo 12 de mi *Unexpected Hanging*) y también libros sobre la cuarta dimensión.

Margaret fue madre de Sir Geoffrey Taylor, un matemático de Cambridge. Alicia, picada en su curiosidad por las incursiones de Charles Hinton en espacios de dimensión mayor que tres, hizo por su cuenta algunos descubrimientos importantes en este campo. Lucy llegó a profesora de química. La menor de las hijas, Ethel Lilian, se casó con un científico polaco, Wilfrid Voynich, estableciéndose en Manhattan, donde Ethel murió en 1960. Fue autora de varias novelas, entre ellas *The Gadfly* (1898), que adquirió gran popularidad en Rusia e inspiró nada menos que tres óperas. En tiempos más recientes, se han vendido en China más de un millón de ejemplares de esta novela. «Los rusos de nuestros días se muestran muy sorprendidos», escribe Gridgeman, «al ver que tan pocas personas de nuestra cultura hayan oído hablar de E. L. Voynich, la novelista inglesa».

Los pocos que supieron apreciar el genio de Boole (y entre ellos hay que destacar al matemático Ernst Schroder) perfeccionaron rápidamente la notación de Boole, que era fastidiosa por su empeño en que se asemejase al álgebra tradicional. En nuestros días, la frase «álgebra de Boole» alude a un sistema abstracto, «ininterpretado», axiomatizable en multitud de formas, pero que en esencia es una versión simplificada, «aerodinámica», del sistema de Boole. «Ininterpretado» quiere decir que a los símbolos de la estructura no se les atribuye significado alguno, ni lógico, ni matemático, ni del mundo sensible.

Lo mismo que en todas las álgebras puramente abstractas, a los símbolos de un álgebra booleana se les pueden asignar muchas interpretaciones distintas. El propio Boole interpretó su sistema a la manera aristotélica, como un álgebra de clases y de sus propiedades, pero al hacerlo amplió enormemente la antigua lógica de clases, desencorsetándola de los estrechos confines del silogismo. Como la notación original de Boole ha caído en desuso, el álgebra booleana moderna se expresa en símbolos de la teoría de conjuntos, pues los conjuntos son lo mismo que Boole llamaba clases: colecciones cualesquiera, compuestas por «elementos» individuales.

Los conjuntos pueden ser finitos, como el formado por los números 1, 2, 3, o el de los habitantes de Málaga que tengan ojos verdes, o los vértices de un cubo, los planetas del sistema solar, o cualquier otra colección de cosas. Hay también conjuntos infinitos, como por ejemplo el conjunto de todos los números pares y, tal vez, el de todas las estrellas. Si tomamos un conjunto concreto, finito o infinito, y en él formarnos la colección de todos sus subconjuntos (entre los que se cuentan el conjunto completo y el conjunto vacío, que carece de elementos), esta colección, junto con la relación de inclusión de unos conjuntos en otros, forma un álgebra booleana de conjuntos.

En la notación moderna se usan letras para denotar los conjuntos, subconjuntos y elementos de tales álgebras. El «conjunto universal», que es el mayor de los conjuntos que se están manejando, se simboliza $\cup$. El conjunto nulo o vacío, es Ø. La unión de los conjuntos *a* y *b* (que reúnen un solo conjunto los elementos de *a* y los de *b*) se simboliza $a \cup b$, la «operación» de unión se representa $\cup$. (La unión de 1, 2, 3 y 4, 5 es 1, 2, 3, 4, 5.) La «intersección» de los conjuntos *a* y *b* (formada por los elementos que pertenecen simultáneamente a ambos) se denota $a \cap b$; el símbolo $\cap$ es el símbolo de la operación de intersección. (La intersección de 1, 2, 3 y 3, 4, 5 es el conjunto formado solamente por 3.) Cuando dos conjuntos son idénticos (por ejemplo, el conjunto de los números enteros impares es igual al conjunto de los números enteros que divididos por 2 dan resto 1), esto es, cuando están formados por los mismos elementos, se puede colocar entre ambos el símbolo « = ». El «complemento» del conjunto *a*, formado por todos los elementos del

conjunto universal que no pertenezcan a *a*, se denota *a'*. (Así, el complemento del conjunto 1, 2 con respecto al conjunto universal 1, 2, 3, 4, 5 es 3, 4, 5.) Finalmente, la relación binaria fundamental entre elementos y conjuntos es la llamada «relación de pertenencia», denotada $\in$;al escribir $a \in b$ estamos diciendo que *a* es miembro o elemento de *b*.
Mencionaré, por ser de interés histórico, que entre los símbolos utilizados por Boole los había para elementos, para clases y para subclases. Así, 1 era la clase universal; 0 la clase vacía o nula; + denotaba la suma de clases (suma que Boole entendía en sentido «excluyente», es decir, que de las clases sumandos se tomaban tan sólo aquellos elementos no poseídos simultáneamente por ambas; la unión o suma incluyente moderna fue utilizada por vez primera por William Stanley Jevons, lógico y economista británico, y presenta tantas ventajas que los lógicos posteriores la han adoptado sin dudar); la intersección de clases se denotaba con el símbolo *x* ; = era la identidad; y el signo menos,, , indicaba que de la primera de dos clases debían eliminarse los elementos pertenecientes a la otra. Para denotar la clase complementaria de *x*, Boole escribía 1- *x*. Al no disponer de símbolo específico para la inclusión, expresaba esta idea de diversas formas, como *a x b* = *a*, que significa que la intersección de *a* y *b* es idéntica a *a*.
El álgebra booleana de conjuntos admite una representación gráfica muy elegante gracias a los llamados diagramas de Venn (en honor del lógico inglés John Venn), que hoy son cosa corriente en las clases de matemáticas de todos los niveles, incluso los más elementales. Los diagramas de Venn se sirven de círculos trazados en el plano para denotar conjuntos. Por ejemplo, podemos representar la unión de dos conjuntos mediante dos círculos que se traslapan, es decir, se superponen parcialmente. (Véase la Figura 41.)

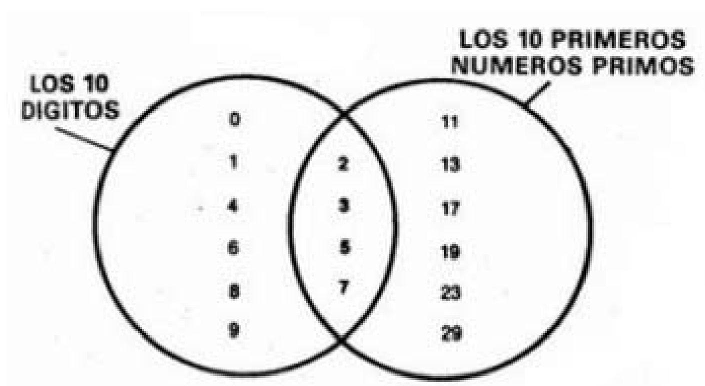

Figura 41. Diagrama de Venn para la intersección de conjuntos

En el ejemplo suponemos que los conjuntos son los diez números dígitos, por una parte, y los diez primeros números primos por otra. No nos ocuparemos más que de los elementos contenidos en alguno de los círculos; los 16 elementos expresados son la unión de los dos

conjuntos. La zona de superposición contiene la intersección de ambos, que está formada por 2, 3, 5, 7, o sea los números primos contenidos entre los diez números dígitos.
Adoptando el convenio de sombrear todas las regiones que sepamos representan conjuntos vacíos, podemos ver cómo los diagramas de Venn sirven para demostrar silogismos., Por ejemplo, el que con tanto sarcasmo citaba Russell. Los círculos rotulados denotan los conjuntos de hombres, de seres mortales y de Sócrates (conjunto que en este caso tiene sólo un elemento). La primera premisa, «Todos los hombres son mortales» queda traducida al diagrama sombreando casi todo el círculo «Hombres» y, expresando así que la clase de hombres no mortales es vacía (véase la Figura 42, izquierda).

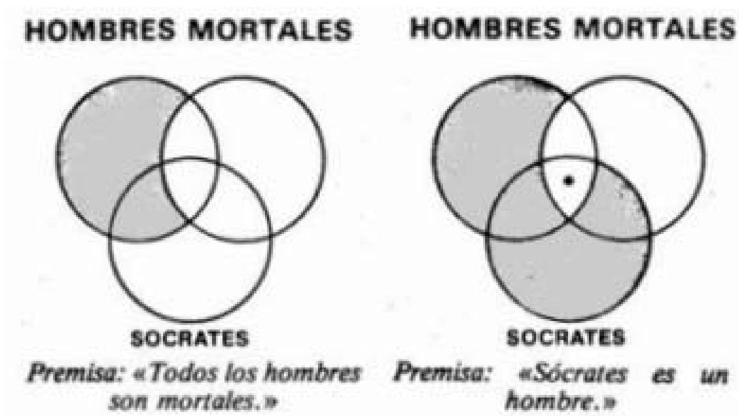

Figura 42.

La segunda premisa «Sócrates es hombre» se traduce de forma análoga, sombreando el círculo de Sócrates para mostrar que la totalidad de Sócrates, a saber, él mismo, está dentro del círculo de «hombres» (véase la Figura 42, derecha). Ahora inspeccionamos en el diagrama si la conclusión «Sócrates es mortal» es válida o no. Lo es, en efecto. La totalidad de Sócrates (la parte no sombreada de su círculo, marcada con un punto) está dentro del círculo de seres mortales. Beneficiándonos de las propiedades topológicas de las curvas cerradas del plano disponemos de un método de representación gráfica que es isomorfo al álgebra booleana de conjuntos.
El propio Boole propuso la primera interpretación nueva e importante de su álgebra, haciendo ver que si a los enunciados verdaderos les asignamos un 1 y a los falsos un 0, su cálculo puede ser aplicado a proposiciones o enunciados que sean, bien verdaderos, bien falsos. Boole no pudo desarrollar su programa, pero sí sus continuadores. Hoy lo conocemos por cálculo proposicional, que es el cálculo que se ocupa de la veracidad o falsedad de enunciados conectados por relaciones binarias, tales como «Si *p*, entonces *q*», «o bien *p*, o bien *q*, pero no ambas», «Si y solamente si *p*, entonces *q*». «No ambas *p* y *q*» y otras

muchas semejantes. En la tabla de la Figura 43 vemos los símbolos del cálculo proposicional en correspondencia con los símbolos del álgebra de Boole.

ALGEGRA BOOLEANA DE CONJUNTOS	CALCULO PROPOSICIONAL
U (CONJUNTO UNIVERSAL)	V (VERDADERO)
ϕ (CONJUNTO VACIO)	F (FALSO)
a, b, c, ... (CONJUNTOS, SUBCONJUNTOS, ELEMENTOS)	*p, q, r*, ... (PROPOSICIONES)
$a \cup b$ (UNION: TODOS LOS ELEMENTOS DE *a* y de *b*)	$p \vee q$ (DISYUNCION: O BIEN *p*, O BIEN *q*, O AMBAS SON VERDADERAS)
$a \cap b$ (INTERSECCION: LOS ELEMENTOS COMUNES A *a* y *b*)	$p \cdot q$ (CONJUNCION: *p* y *q* SON AMBAS VERDADERAS)
$a = b$ (IDENTIDAD: *a* y *b* SON EL MISMO CONJUNTO)	$p \equiv q$ (EQUIVALENCIA: *q* ES VERDADERA SI *p* LO ES, Y SOLO EN ESE CASO)
a' (COMPLEMENTO: TODO LO DE U QUE NO PERTENEZCA A *a*)	$\sim p$ (NEGACION: *p* ES FALSA)
$a \in b$ (INCLUSION: *a* ES UN ELEMENTO DE *b*)	$p \cup q$ (IMPLICACION: SI *p* ES VERDADERA, *q* ES VERDADERA)

Figura 43. Símbolos correspondientes en dos versiones del álgebra de Boole

Es fácil comprender la isomorfía de las dos interpretaciones analizando el silogismo relativo a Sócrates. En lugar de decir «Todos los hombres son mortales», que expresa una premisa mediante propiedades de clase o inclusión de conjuntos, podemos formularla mediante la condicional «Si *x* es hombre, entonces *x* es mortal». Lo que hemos hecho es formular dos proposiciones y enlazarlas mediante una «conectiva» llamada «implicación» (o más propiamente, «condicional»). Podemos traducir esta condicional al diagrama de Venn exactamente igual que hicimos con «todos los hombres son mortales». En efecto, todas las relaciones binarias del cálculo proposicional pueden ser traducidas a diagramas de Venn, y usar después los círculos del diagrama para resolver problemas sencillos del cálculo proposicional. Es una vergüenza que los autores de la mayoría de los textos de introducción a la lógica formal no hayan acertado a servirse de este recurso. Siguen utilizando diagramas para ilustrar la vieja lógica de inclusión de clases, pero parecen incapaces de aplicarlos al cálculo proposicional, donde su eficacia no es menor. Y de hecho es superior, pues no es preciso preocuparse del «cuantificador existencial», que sirve para declarar que una clase no es vacía porque posee al menos un elemento. En lógica tradicional se utilizaba para este propósito el indefinido «algún» (corno en «algunas manzanas son rojas»). Para poder dar cuenta de tales enunciados Boole tuvo que trenzar en su álgebra toda suerte de intrincados nudos.

Para ver lo fácilmente que los diagramas de Venn permiten resolver ciertos tipos de acertijos lógicos, tomemos las siguientes premisas relativas a tres hombres de negocios, Antonio, Benito y Carlos, que almuerzan juntos todos los días laborables.

1. Siempre que Antonio pide un martini, Benito también.
2. O bien Benito, o bien Carlos piden siempre un martini, pero nunca ambos a la vez el mismo día.
3. Todos los días, bien Antonio, bien Carlos, o ambos, piden un martini.
4. Cuando Carlos pide un martini, también lo pide Antonio.

Para traducir estos asertos a diagramas de Venn, interpretamos el hecho de tomar un martini como «verdadero», y el de no tomarlo, como «falso». Las ocho regiones en que los círculos traslapados dividen el plano están dibujadas en la Figura 44, señaladas de forma que muestren todos los posibles valores de verdad de *a, b* y *c*, que representan a Antonio, Benito y Carlos. Así, la región marcada *a, ~b, c*, indica que Antonio y Carlos toman martini, pero Benito no. Intente el lector sombrear las regiones declaradas vacías por las premisas, y examine después el resultado, para determinar así quiénes tomarían aperitivo si tuviésemos que almorzar con ellos.

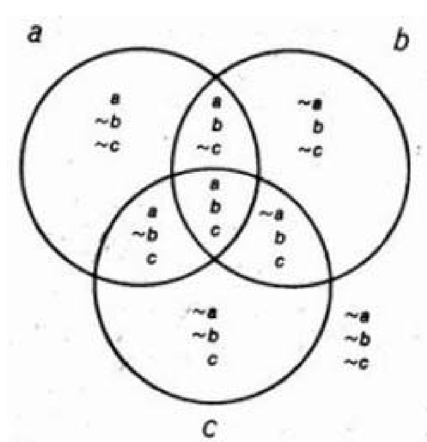

Figura 44. Diagrama de Venn para el acertijo de los martinis

El álgebra booleana admite muchas otras interpretaciones. Por ejemplo, cabe considerarla como caso particular de otras estructuras abstractas llamadas anillos y también como caso particular de otro tipo de estructuras llamadas retículos. Admiten interpretación dentro de la teoría combinatoria, de la teoría de la información, la teoría de grafos, la teoría de matrices, y en general, dentro de las teorías metamatemáticas de sistemas deductivos. En estos últimos años, una de sus más útiles interpretaciones lo ha sido en teoría de conmutación, que es de máxima importancia para el diseño de ordenadores electrónicos, aunque no se limita a redes eléctricas. Es aplicable a cualesquiera tipos de transmisión de energía a través de canales provistos de dispositivos de conexión, desconexión o conmutación a otros canales.

La energía puede ser la de gases o líquidos que fluyen por conductos, corno sucede en los modernos sistemas de control hidroneumático (véase «Fluid Control Devices», por Stanley W. Angrist, en *Scientific American*, diciembre de 1964). Puede consistir en rayos luminosos. Puede ser energía mecánica, como en la máquina lógica ideada por Jevons para resolver problemas de cuatro términos en álgebra booleana. Pueden ser bolitas rodantes, corno sucede en algunos juguetes que simulan ordenadores. Si los hipotéticos habitantes de otros planetas tuvieran muy desarrollado el olfato, sus máquinas de cálculo podrían exteriorizar los resultados a través de orificios de olisqueo. Mientras pueda distinguirse claramente el desplazamiento o no desplazamiento de energía por cada canal, cabrá establecer un isomorfismo entre los dos valores energéticos y los dos valores de verdad del cálculo proposicional. A cada conectiva binaria del cálculo le corresponde un circuito de conmutación. Vemos en la Figura 45 tres ejemplos sencillos. El circuito representado en la parte inferior se utiliza cuando hay necesidad de controlar un punto de luz desde dos conmutadores distantes entre sí. Es fácil ver que cuando la luz está apagada basta cambiar el estado de uno de los conmutadores para encenderla, y que si la luz está encendida, basta actuar sobre cualquiera de ellos para apagarla.

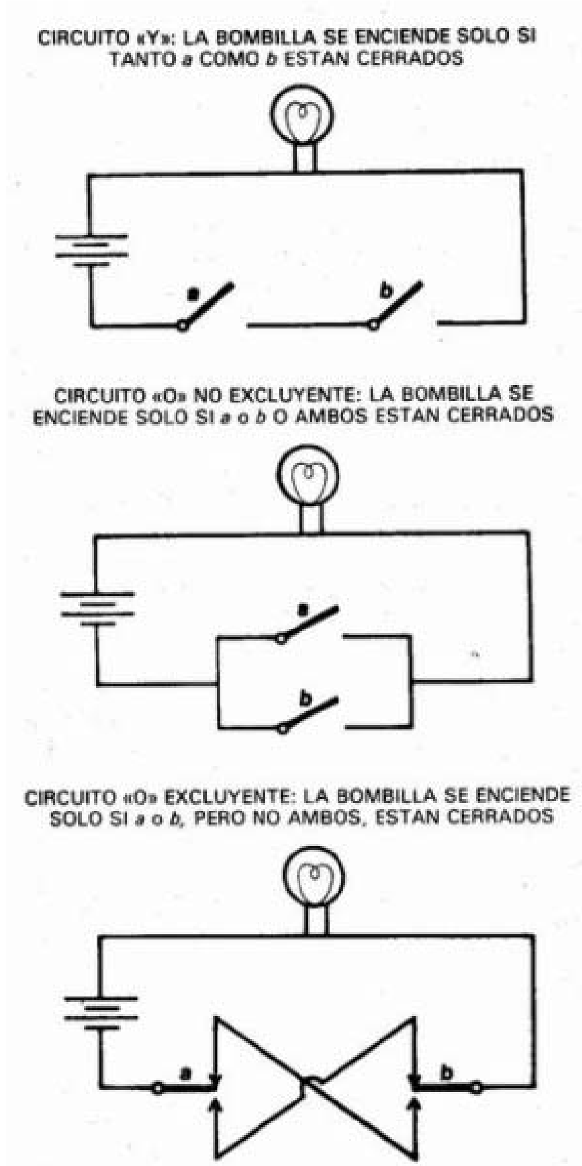

Figura 45. Circuitos para tres relaciones binarias

Aunque esta interpretación eléctrica de álgebra booleana había sido propuesta ya en 1910 por Paul S. Ehrenfest en una revista rusa, y luego, independientemente, en otra japonesa en 1936, el primer trabajo verdaderamente importante, el que sirvió para introducir el tema en el diseño de computadores, es el debido a Claude E. Shannon, «A Symbolic Analysis of Relay and Switching Circuits», en *Transactions of the American Institute of Electrical Engineers*, vol. 57, diciembre de 1938, trabajo inspirado en la tesis que Shannon hubo de presentar para el grado master por el *Massachusetts Institute of Technology*.

Desde los tiempos del artículo de Shannon, el álgebra de Boole ha adquirido importancia fundamental en el diseño de ordenadores y sistemas automáticos, pues permite la simplificación de circuitos y el ahorro de «hardware». El circuito es traducido primero a un enunciado de lógica simbólica; el enunciado es «minimizado» luego por métodos muy ingeniosos; y finalmente, el enunciado simplificado vuelve a ser traducido a un circuito, que admite ahora diseño más sencillo. Como todos sabemos, en los ordenadores modernos los conmutadores ya no son relés electromagnéticos ni válvulas termoiónicas, sino transistores y otros pequeñísimos dispositivos semiconductores.

Veamos ahora una última interpretación del álgebra booleana, que es verdaderamente curiosa. Fijémonos en los ocho números de la siguiente sucesión: 1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30. Como vemos, se trata de los divisores de 30, incluidos el 1 y el propio 30. Interpretemos la «unión» de dos de ellos como el mínimo común múltiplo de ambos, y la «intersección», como su máximo común divisor. La inclusión de conjuntos se traduce ahora en la relación binaria «ser divisor de». El papel del conjunto universal lo hace aquí el número 30; el del conjunto vacío, el 1. Dado un número *a* de esta colección, su complemento es 30/*a*, que también pertenece al conjunto. Resulta que con esta nueva interpretación de las relaciones de Boole seguimos teniendo una estructura booleana coherente. Todos los teoremas del álgebra booleana tienen contrapartida en este curioso sistema basado en los divisores de 30. Por ejemplo, en el álgebra booleana, el complementario del complementario de *a* es sencillamente *a*; en la interpretación de cálculo proposicional, tenemos que la negación de una negación es idéntica a la no negación. Con más generalidad, tan sólo una serie impar de negaciones equivale a una negación. Apliquemos esta ley booleana al número 3. Su complementario es 30/3 = 10. El complementario de 10 es 30/10 = 3, que nos devuelve el número 3 inicial.

Examinemos dos famosos teoremas del álgebra booleana conocidos por leyes de De Morgan. Escritos en el álgebra de conjuntos afirman:

$$(a \cup b)' = a' \cap b'$$
$$(a \cap b)' = a \cup b'$$

En el cálculo proposicional tienen el siguiente aspecto:

$$\sim (avb) \equiv \sim a \bullet \sim b$$
$$\sim (a \bullet b) \equiv \sim av \sim b$$

Si el lector sustituye *a* y *b* por cualesquiera dos divisores de 30, e interpreta los signos operatorios como ya se ha explicado, comprobará que siguen cumpliéndose las leyes de De

Morgan. No es casualidad que estas leyes formen par; por el contrario, sirven perfectamente para ilustrar el famoso principio de dualidad del álgebra de Boole: si en cualquier enunciado booleano se cambian todos los signos de unión que en él figuren por signos de intersección, y éstos por aquéllos, intercambiando al mismo tiempo los conjuntos nulo y universal e invirtiendo el sentido de los signos de inclusión, el resultado seguirá siendo una ley válida. Además, tales cambios pueden efectuarse en todos los pasos de la demostración de una ley, y con ello quedará demostrada al mismo tiempo la ley dual. (Hay en geometría proyectiva un principio de dualidad igualmente bello, relativo al intercambio de puntos y rectas.) También los números 1, 2, 3, 5, 6, 7, 10, 14, 15, 21, 30, 35, 42, 70, 105, 210 (que son los 16 divisores de 210) forman un álgebra booleana con la interpretación correspondiente, aunque ahora, claro está, el elemento universal es 210, y el complementario de *a* es 210/*a*. ¿Sabrá el lector descubrir un método sencillo para engendrar sistemas de 2n números, siendo *n* un entero positivo cualquiera que formen álgebras booleanas de este tipo particular?

Soluciones

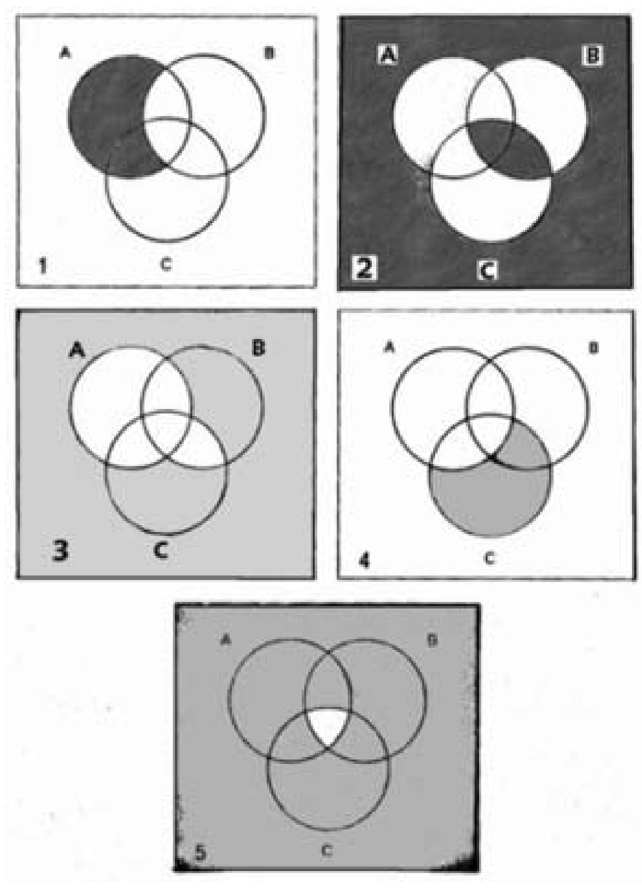

Figura 46. Solución del problema de los martinis, con diagramas de Venn

Tres círculos de Venn, sombreados como en la Figura 46, permiten resolver el problema relativo a los tres amigos que almuerzan juntos. Cada uno de los cuatro primeros diagramas ha sido sombreado de forma que exprese una de las cuatro premisas del problema. Al superponerlos y formar el último diagrama vemos que si las cuatro premisas son verdaderas, la única posible combinación de valores de verdad es *a; b,* ~ *c*, es decir, *a* verdadera, *b* verdadera y *c* falsa. Puesto que estamos identificando «verdadero» con pedir un martini, resulta que Antonio y Benito toman siempre martini, mientras que Carlos nunca lo toma.

El método de engendrar 2n enteros que formen álgebra booleana fue descrito por Francis D. Parker en *The American Mathernatical Monthly* de marzo de 1960, página 268. Tomemos un conjunto cualquiera de números primos distintos, por ejemplo, 2, 3 y 5. Anotemos ahora los productos de todos los subconjuntos de estos tres números. Al subconjunto vacío le asociaremos como producto el número 1. Resulta así el conjunto de productos 1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30, es decir, el primero de los ejemplos de este tipo ya explicados. De forma análoga, los cuatro números primos 2, 3, 5, 7 generan el segundo de esos ejemplos, que constaba de los 24 = 16 divisores de 210. La demostración de que todos estos conjuntos dan efectivamente álgebras de Boole puede verse en *Boolean Algebra*, de R. L. Goodstein, en la solución del problema nº 10.