Capítulo 6
Paseos aleatorios y juegos de apuestas

... y con esto se quietó y prosiguió su camino, sin llevar otro que aquel que su caballo quería, creyendo que en aquello consistía la fuerza de las aventuras.
Don Quijote, Primera parte, Cap. II

Es muy posible que el trotamundos empedernido, que va compulsivamente errando de una ciudad a otra, padezca alguna forma de neurosis. Empero, hasta el más cuerdo precisa, si bien en dosis moderadas, de alguna clase de conducta imprevisible. Una de ellas consiste en vagar sin rumbo, a la buena ventura. Seguramente la fama de las grandes novelas picarescas y del Quijote se deba, al menos en parte, al placer que por persona interpuesta experimenta el lector con los inesperados lances que provoca tan azarosa senda.

En su ensayo «Nueva refutación del tiempo», Jorge Luis Borges nos describe una caminata a la fortuna por las calles de Barracas: «Procuré una máxima latitud de probabilidades para no cansar la expectativa con la obligatoria antevisión de una sola de ellas». La segunda luna de miel de G. K. Chesterton, tal y como nos la describe en su autobiografía, fue un azaroso «viaje por el vacío». Su esposa y él tomaron el primer autobús que pasó, se bajaron al pasar por una estación de ferrocarril, tomaron el primer tren que pasó y al término del trayecto echaron a andar por trochas y senderos hasta llegar finalmente a una posada, donde se quedaron.

Los matemáticos tienen la pertinaz costumbre de analizar todo lo analizable, y las caminatas sin rumbo no iban a ser excepción. Matemáticamente hablando, son tan ricas en aventuras como las andanzas del Ingenioso Hidalgo. En efecto, los paseos aleatorios son una de las principales ramas de la teoría de cadenas de Markov, que a su vez son uno de los más candentes temas de la moderna teoría de probabilidades, en razón de su creciente aplicación científica.

Una cadena de Markov (así llamada en honor del matemático ruso A. A. Markov, el primero en estudiarlas) es un sistema de «estados» discretos más un sistema de probabilidades de transición de unos estados a otros, probabilidades que han de ser independientes de la Historia», es decir, de la evolución del sistema en el pasado. Entre los ejemplos más sencillos de tales cadenas tenemos la caminata aleatoria a lo largo del segmento rectilíneo que vemos en la Figura 34.

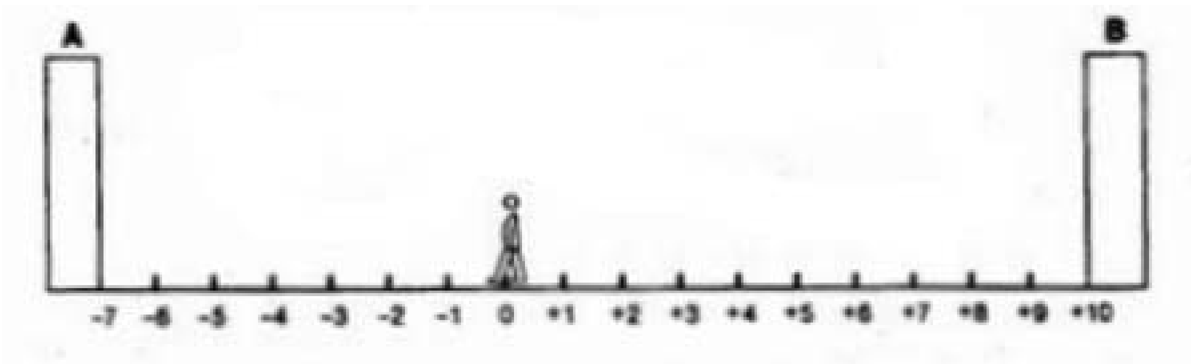

Figura 34. Paseo aleatorio unidimensional con barreras absorbentes

Cada graduación del segmento corresponde a un paso de longitud unidad. Una persona comienza su paseo en el punto señalado 0. En cada ocasión, antes de decidir en que sentido dará el paso siguiente, el hombre lanza una moneda: si sale cara dará un paso a la derecha; si cruz, un paso a la izquierda. Dicho con terminología matemática, su «probabilidad de transición» de cada graduación a una adyacente es de 1/2. Tal caminata se llama simétrica, por ser iguales las probabilidades de ir a la derecha y a la izquierda. Las barras verticales A y B, situadas en 7 y en + 10 son «barreras absorbentes»; esto significa que si el andarín se tropieza con un cualquiera de ellas es «absorbido», y la caminata termina allí.

Entre las características más originales de este paseo se cuenta la de ser isomorfo a un antiguo problema llamado «ruina del jugador». El jugador A comienza con un capital de $7, y el jugador B, con $10. Van apostando sistemáticamente a «cara o cruz». Cuando sale cara, B le paga un dólar a A; por cada cruz, A le da un dólar a B. El juego termina tan pronto como uno de los jugadores queda «arruinado», es decir, se queda sin dinero. Es fácil comprender la correspondencia entre el desarrollo de este juego y las andanzas del caminante. En cada instante, el capital de A, expresado en dólares, está representado por la distancia del paseante a la barrera A, mientras que el capital de B está dado por la distancia del errático sujeto a la barrera B. Si los dos primeros lanzamientos han dado caras, el paseante avanza dos pasos hacia la derecha; interpretado en el lenguaje de apuestas, estamos diciendo que A ha aumentado su capital de $7 a 9, mientras que B ha perdido, de $10 a 8. Si el paseante llega a la barrera A, quiere decir que A se ha arruinado. Y si el andarín se tropieza con la barrera B, es B quien ha sufrido la ruina.

Ambas interpretaciones dan iguales respuestas a todas las cuestiones probabilísticas referentes a ellas. Algunas resultan fáciles de dar, otras son de extrema dificultad. He aquí una de las más fáciles: ¿cuál es la probabilidad de ganar para cada jugador? O lo que es equivalente, ¿cuál es la probabilidad de que el paseo termine en una u otra barrera? Cuesta poco demostrar que la probabilidad de victoria de cada jugador está dada por su capital inicial dividido por el total de dólares que poseen entre ambos. Así, la probabilidad de que A llegue a arruinar a B es de 7/17; la probabilidad de que B le gane la partida a A es 10/17. Enfocado como paseo aleatorio, la probabilidad de que la caminata finalice en la barrera B es 7/17, y la de que termine en A es 10/17. (Puede verse una demostración sencilla de estos hechos, basada en una goma elástica estirada, en «Brownian Motion and Potential Theory», por Reuben Hersh, y Richard J. Griego, en *Scientific American*, marzo de 1969).

La suma de ambas probabilidades tiene que ser 1 (probabilidad de la certeza, o del «suceso seguro»). La interpretación intuitiva de este hecho es que si la partida, o el paseo, durase lo suficiente, es seguro que tendrá fin. ¿Qué sucedería si se suprimiera una de las barreras, la B por ejemplo, dejando así que la recta se prolongue hacia la derecha hasta el infinito? Entonces, si el proceso tiene duración suficiente, es seguro que terminará en la barrera A. Interpretado como juego de azar estamos diciendo que si A se enfrenta a un contrincante con capital infinito, es seguro que A terminará arruinado. Malas noticias, pues, para los jugadores empedernidos. Aún cuando todas sus apuestas fuesen equitativas, como están enfrentándose a un «oponente» (todos los demás jugadores del mundo) cuyo capital es virtualmente ilimitado, tienen garantizada la ruina.

Si bien el cálculo es de otro tipo, también es fácil hallar la probabilidad de que el caminante, partiendo de un determinado punto, alcance otro punto dado (o retorne al punto de partida) después de dar un número prefijado de pasos. Por consideraciones de paridad, es fácil ver que en la mitad de casos esa probabilidad es 0 (suceso imposible). Por ejemplo, el paseante no puede ir desde 0 hasta un punto de abscisa par en un número impar de pasos, ni alcanzar puntos a distancia impar en número par de etapas. ¿Qué probabilidad tiene de pasar de 0 a + 1 en tres pasos exactamente? Tal probabilidad es idéntica a la de que en tres lanzamientos de la moneda salgan, sin que importe el orden, dos caras y una cruz. Puesto que así sucede en tres ocasiones de los ocho resultados equiprobables posibles de tres lanzamientos, la solución es 3/8. (Podemos complicar la situación sustituyendo una o ambas barreras absorbentes por «barreras reflectantes» situadas en el punto medio entre dos divisiones consecutivas. Cuando el paseante choca con una tal barrera, rebota hasta la marca que acababa de abandonar. En la partida de «cara o cruz» equivaldría a que cada vez que un jugador se arruinase se le entregara un dólar para que pudiera continuar jugando. Si ambas barreras fuesen reflectantes el juego no concluiría jamás.)

También sencillo, pero más difícil que los anteriores, es el cálculo del número esperado de lanzamientos antes de que en el segmento limitado por barreras absorbentes el paseante quede absorbido por alguna. El «número esperado» significa el promedio de pasos que tardaría en concluir el paseo, de repetirse indefinidamente este experimento. Tal número resulta ser el producto de las distancias de las barreras al punto de partida, en nuestro caso, 7 x 10 = 70. Un paseo «típico» duraría, pues, 70 pasos; la partida de cara o cruz que pudiéramos llamar «normal» acabaría con la ruina de uno de los jugadores al cabo de unos 70 lanzamientos. Esta cifra es considerablemente mayor de lo que esperaría uno, e implica que en un juego «limpio» entre dos jugadores, cada cual con $100 de capital inicial, y que van cada uno arriesgando $1 en cada lance, la partida completa duraría alrededor de 10.000 envites. Todavía más contrario a la intuición: si uno de los jugadores empieza con sólo $1, y el otro con 500, la partida promedio constaría de 500 apuestas. En el paseo aleatorio, si el andarín parte a la distancia de un paso de una barrera, y de 500 pasos de la otra, ¡podría recorrer, por término medio, 500 pasos antes de ser absorbido!

¿Cuál es el número esperado de pasos hasta que el caminante se sitúa por *primera* vez a distancia n del punto de partida, 0, suponiendo que (de haberlas) ninguna de las barreras diste del origen menos de n? Se comprueba fácilmente que este problema es caso particular del anterior. Equivale a preguntarse por el número esperado de pasos hasta que el caminante sea absorbido, sabiendo que cada barrera está a distancia n de 0. Será, sencillamente, $n \times n = n^2$. Por tanto, si el caminante da n pasos, podemos esperar que la distancia máxima que alcance (en algún momento de su caminata) sea de $\sqrt{n}$.

Que no es lo mismo que preguntarse cuál es la distancia esperada al origen en la posición final, tras n pasos. La fórmula es ahora bastante más difícil de deducir. Por ejemplo, para un solo paso tal distancia es, evidentemente, 1. Para dos pasos, sigue siendo 1, pues las cuatro posiciones 0, 0, 2 y 2, que puede ocupar el caminante son equiprobables. Con tres pasos la distancia esperada es 1,5. Cuando n tiende hacia infinito, la distancia esperada se va aproximando asintóticamente a $\sqrt{(2n/\pi)}$, es decir, alrededor de 0,8 $\sqrt{n}$ unidades, a cualquiera de los dos lados de 0, para valores grandes de n. (Puede verse al respecto el *libro Probability and Statistics*, por Frederick Mosteller y coautores, p. 14.)

De todas las propiedades del paseo aleatorio, quizá la más difícil de creer sea la siguiente. Tornamos una recta graduada, sin barreras, y nos preguntarnos con qué frecuencia irá el caminante pasando de uno a otro lado del origen. A causa de la simetría del paseo esperaríamos, sin duda, que en una larga caminata el andarín se encontrara aproximadamente la mitad del tiempo en cada una de las semirrectas que parte del origen. Ocurre exactamente lo contrario. Independientemente de la duración del paseo, el número más probable de cambios de lado es 0, el número siguiente en probabilidad es 1, y a continuación, 2, 3, etc.

William Feller, en un famoso capítulo sobre «Fluctuaciones en lanzamientos de monedas y caminatas al azar» (de su clásica *An Introduction to Probability Theory and Its Applications*, hay traducción al español de la tercera edición, *Introducción a la teoría de probabilidades y sus aplicaciones*, Limusa, S. A., Méjico, 1975) tiene lo siguiente que decir: «Si un educador o un psicólogo contemporáneo tuviese que describir las conductas a largo plazo de las monedas, observando durante mucho tiempo el desarrollo de una partida de "cara o cruz", sacaría la conclusión de que la mayoría de las monedas están cargadas. Lanzando muchas monedas, a razón de *n* veces cada una, la proporción de ellas que da la ventaja a uno de los jugadores la práctica totalidad del tiempo es sorprendentemente grande. Tan sólo en unos pocos casos irá la ventaja cambiando de manos y fluctuando de la forma que parecería obligada en una moneda bien compensada.» Lanzando tan sólo 20 veces, la probabilidad de que cada jugador lleve la ventaja 10 veces es únicamente 0,06 +, resultado de aspecto poco verosímil. La probabilidad de que el perdedor definitivo nunca lleve la delantera, es en cambio, 0,35 +.

Suponiendo que la moneda sea lanzada una vez por segundo, durante todos los segundos de un año, Feller calcula que en una de cada 20 repeticiones del experimento, el jugador que termina ganando la partida llevará la ventaja durante más de 364 días y 10 horas. «Muy pocas personas podrían creer», escribe Feller, «que una moneda perfecta pueda producir secuencias tan absurdas, sin alternancias en el control del juego, a pesar de los millones de ensayos sucesivos. Y no obstante, esto es lo que sí haría una moneda bien equilibrada, con bastante regularidad».

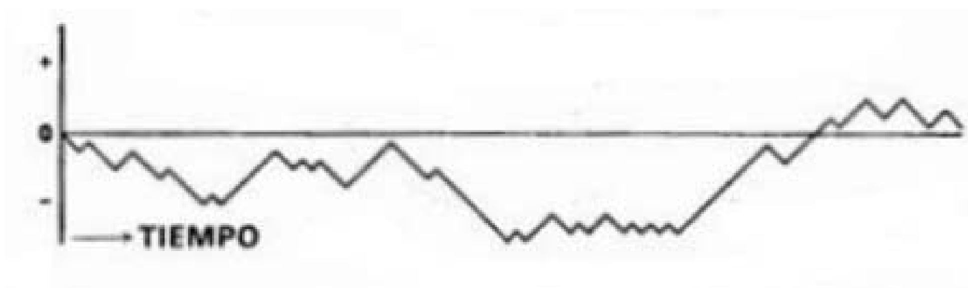

Figura 35. Paseo aleatorio simétrico basado en los primeros 101 dígitos del número π

La Figura 35 nos muestra la gráfica de un paseo aleatorio típico a lo largo del eje vertical, sin barreras. El transcurrir del tiempo está representado por el avance hacia la derecha. En lugar de lanzar una moneda o utilizar una tabla de dígitos aleatorios, nuestro paseo se basa en las 100 primeras cifras decimales deπ. (Dado que las cifras de π han superado todas las pruebas encaminadas a establecer su carácter aleatorio, nos proporcionan una fuente muy adecuada de cifras tomadas al azar). Cada cifra par se traduce en un paso hacia arriba; cada dígito impar, en el descenso de un paso. Tras 101 pasos, el andarín tan sólo se ha encontrado 17 veces por encima del eje horizontal, alrededor del 17 por 100 del total. Tan sólo una vez ha visitado el punto de partida. El gráfico es también característico en que muestra cómo los retornos a 0, o a puntos próximos a 0 se producen a oleadas que tienden a aumentar progresivamente de longitud, con tasa de crecimiento aproximadamente igual a la raíz cuadrada del tiempo. En la ya citada obra de Feller pueden verse gráficos parecidos, basados en el lanzamiento simulado de una moneda durante 10.000 veces consecutivas.

Podemos ahora complicar las cosas haciendo que las probabilidades de transición difieran de 1/2 y admitiendo que los pasos de la caminata puedan tener longitud mayor que 1.

Fijémonos en la curiosa y paradójica situación siguiente, que me fue explicada por Enn Norak, un matemático canadiense, si bien con terminología de apuestas. Un paseante parte de un punto situado a 100 pasos a la derecha de 0, en un eje sin barreras (véase la Figura 36).

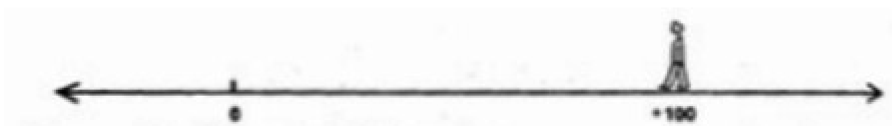

Figura 36. Una paradoja basada en un paseo aleatorio a lo largo de una recta sin barreras

Como dispositivo de azar no se utiliza una moneda, sino un mazo de 10 naipes, cinco negros y cinco rojos-. Una vez barajados, los naipes se colocan boca abajo, en fila sobre la mesa, y se elige uno al azar. Tras observar su color, la carta se desecha. De ser roja, el paseante avanza hacia la derecha; si negra, se desplazará hacia la izquierda. De esta forma se prosigue hasta que se hayan examinado las diez cartas. (Las probabilidades de transición cambian en cada paso. Tan sólo será de 1/2 cuando las proporciones de cartas rojas y negras sean iguales, antes de la extracción). La caminata difiere también de las ya comentadas en que antes de examinar cada carta el andarín ha de decidir cuál será la longitud de su próximo paso (que no tiene por qué ser un número entero.)

Supongamos que el paseante adopte la siguiente estrategia para decidir la longitud de sus pasos: tras observar la carta, dará un paso (hacia la derecha o la izquierda, según proceda) de longitud exactamente igual a la mitad de su distancia a 0. Su primer paso medirá pues 100/2 = 50 unidades. Si la carta observada fuese roja, llegaría hasta la división 150, y su paso siguiente tendría 150/2 = 75 unidades. Mas si la primera carta fuese negra, se desplazaría hacia la izquierda hasta la graduación número 50, y su siguiente paso tendría entonces 50/2 = 25 unidades. De esta forma se proseguiría hasta destapar la última carta. ¿Se encontrará entonces a la izquierda o a la derecha de la marca número 100, de donde partió inicialmente?

Es completamente seguro que se encontrará a la izquierda, resulta ser la solución. Quizá no parezca demasiado sorprendente, pero sin duda sí lo es que, independientemente del orden de extracción de los naipes, la caminata terminará siempre ¡en el mismo punto, a unas 76 unidades del punto inicial! La distancia exacta viene dada por la fórmula

$$a-\left[a(1-\frac{1}{k^2})^n\right]$$

donde *a* es la abscisa del punto de partida, y *n* el número de cartas rojas (o negras) que contiene el mazo. Cuando *a* sea 100 y *n* sea 5, como en nuestro ejemplo, la fórmula da el valor 76,26953125 para la distancia que el andarín se ha desplazado hacia la izquierda cuando el paseo termina.

Traduzcamos todo esto al juego de apuestas de Norak. Un jugador empieza la partida con $100. Su ganancia o pérdida queda decidida por un mazo bien barajado de cinco cartas rojas y otras tantas negras, del cual se van extrayendo y observando los naipes, sin reposición. (Daría lo mismo lanzar 10 veces una moneda, con tal de que al cabo haya mostrado igual número de caras y cruces. Al usar naipes queda garantizada tal igualdad.) Nuestro jugador gana cuando sale carta roja, y pierde cuando sale negra. En cada envite apuesta la mitad de su capital. Quizá cueste creerlo, pero al final de la partida habrá perdido exactamente $ 76,26953125. Las pérdidas aumentan al crecer *n*. Si *n* fuera 26, corno sucedería tomando la baraja completa de 52 naipes, las pérdidas serían de más de $ 99,90. De todas maneras, nunca serían mayores que $ 100.

En lugar de apostar en cada envite la mitad de su capital, podría apostar una proporción fija cualquiera. Sea ésta 1/*k*, donde *k* es un número real positivo arbitrario. Cuando menor sea esta fracción, tanto menos se habrá perdido al final de la partida; cuanto mayor, tanto más. Si *k* fuese 1, es seguro que se perderá todo. En el caso general, la suma perdida es

$$a-\left[a(1-\frac{1}{k^2})^n\right]$$

Aún podemos generalizar más mezclando cartas rojas y negras en distintas proporciones, Pero la teoría general es demasiado compleja para presentarla aquí.

Fijémonos ahora en un divertido problema propuesto por Norak, que se funda en una variante del juego recién descrito. Podríamos enunciarlo como paseo aleatorio, pero me

limitaré a presentarlo en su versión equivalente, como juego de apuestas. El juego se desarrolla igual que antes, salvo que ahora es el contrario de nuestro jugador quien decide la puesta de cada envite. Llamémosle Sánchez y supongámosle lo bastante rico corno para afrontar cualquier pérdida. Nuestro jugador sigue comenzando con $100. Se usa una baraja completa de 52 cartas. Antes de extraer y observar cada naipe, Sánchez apuesta siempre exactamente la mitad del capital que posee el otro jugador, es decir, el jugador de los $100. ¿Habrá Sánchez ganado o perdido dinero, una vez extraída la última carta? Sea de una u otra forma, ¿será siempre igual la pérdida o ganancia, y de ser así, qué fórmula la expresa? Si el lector ha seguido correctamente el razonamiento que antecede, podrá contestar estas preguntas casi sin pensar.
En un próximo capítulo concluiremos el tema, tan asombroso como desconcertante, de los paseos aleatorios, examinando algunas caminatas en el plano y en el espacio, y en reticulados como dameros y aristas de los sólidos regulares.

Soluciones

El problema de las apuestas era, más que nada, una broma. Si el jugador A comienza con cierto capital, y si en cada extracción de un naipe de un mazo con igual número de cartas rojas y negras se le permite a B, oponente de A, apostar la mitad del capital de que en cada momento dispone A, el juego es evidentemente el mismo que el ya explicado, donde A apuesta siempre la mitad de su propio capital. El jugador B, quien decide ahora las apuestas, ganará exactamente lo que pierda A, y éste pierde lo mismo que en la partida ya explicada arriba. Por consiguiente, sigue siendo válida la fórmula allí dada. Se nos dice que el perdedor comienza con $ 100, y que el instrumento de azar es un mazo de 52 naipes. El ganador se llevará exactamente 100 - [100(3/4)26] dólares, y no le deja al perdedor ni una perra gorda.