nap

NÚCLEOS
DE APRENDIZAJES
PRIORITARIOS

5

SERIE
CUADERNOS
PARA EL AULA

Matemática

SEGUNDO
CICLO EGB /
NIVEL PRIMARIO

MINISTERIO de
EDUCACIÓN
CIENCIA y TECNOLOGÍA
PRESIDENCIA de la NACIÓN

nap

NÚCLEOS
DE APRENDIZAJES
PRIORITARIOS

5

SERIE
CUADERNOS
PARA EL AULA

Matemática

SEGUNDO
CICLO EGB /
NIVEL PRIMARIO

MINISTERIO de EDUCACIÓN CIENCIA y TECNOLOGÍA
PRESIDENCIA de la NACIÓN

cfe Consejo Federal de Educación

Cuadernos para el aula, matemática 5 - 1a ed. - Buenos Aires : Ministerio
de Educación, Ciencia y Tecnología de la Nación, 2007.
184 p. ; 22x17 cm. (Cuadernos para el aula)

ISBN 978-950-00-0584-5

1. Matemática-Enseñanza Primaria 5º Año.
CDD 372.7

La presente publicación se ajusta a la cartografía oficial, establecida
por el Poder Ejecutivo Nacional, a través del IGM –Ley 22.963–,
y fue aprobada por el expediente GG07 0541/5 en el mes de marzo de 2007

Subsecretaría de Equidad y Calidad Educativa

Área de producción pedagógica *Cuadernos para el aula*
Coordinación y supervisión pedagógica general
Adela Coria

Equipo del Área de Matemática, de la Dirección Nacional de Gestión Curricular y Formación Docente
Coordinación y supervisión pedagógica
Mónica Agrasar
Silvia Chara
Graciela Chemello

Autores
Clara Barrionuevo
Beatriz Bricas
Edith Gorostegui

Lectura crítica
Alejandra Lapegna

Área de producción editorial
Coordinación de Publicaciones
Raquel Franco

Brenda Rubinstein, *Asistencia de coordinación*
Silvana Franzetti, *Edición*
Félix De las Mercedes, *Corrección*
Carolina Mikalef, Alejandro Luna, *Dirección de arte*
Araceli Gallego, *Coordinación gráfica*
Alberto Caut, *Diagramación*
Mariana Pereyra, Gastón Caba, *Ilustración*
Miguel Forchi, *Cartografía*
Alejandro Peral, *Fotografía*
Rafael Blanco, *Documentación*

Presentación

En las décadas pasadas, diversos procesos económicos, sociales y políticos que tuvieron lugar en nuestro país pusieron en crisis el sentido de nuestra democracia. Aún la sociedad argentina es profundamente desigual a lo largo y a lo ancho de nuestro territorio. Estamos realizando importantes esfuerzos en materia de políticas públicas que revelan indicios alentadores en el proceso de contribuir a revertir esas desigualdades. Pero ello no ha sido hasta ahora suficiente. Niñas, niños y jóvenes son parte de una realidad donde la pobreza y la exclusión social expresan todavía de manera desgarradora la enorme deuda que tenemos con ellos y con su futuro.

Las brechas sociales se manifiestan también en la fragmentación de nuestro sistema educativo, en la desigualdad de trayectorias y aprendizajes, y en las dificultades que enfrentan los docentes al momento de enseñar.

En las circunstancias más difíciles, las escuelas se sostuvieron como uno de los lugares en los que se continuó albergando un sentido de lo público, resguardando las condiciones para que hayamos podido volver a pensar en la posibilidad de un todos. Maestros y maestras redoblan sus esfuerzos, persisten en la búsqueda de alternativas, y todos los días ponen en juego su saber en la construcción de nuevas prácticas.

Al reasumir desde el Estado la responsabilidad de acompañar el trabajo cotidiano de los docentes, buscamos recrear los canales de diálogo y de aprendizaje, afianzar los espacios públicos y garantizar las condiciones para pensar colectivamente nuestra realidad y, de este modo, contribuir a transformarla.

Creemos que es preciso volver a pensar nuestra escuela, rescatar la importancia de la tarea docente en la distribución social del conocimiento y en la recreación de nuestra cultura, y renovar nuestros modos de construir la igualdad, restituyendo el lugar de lo común y de lo compartido, y albergando a su vez la diversidad de historias, recorridos y experiencias que nos constituyen.

Transitamos una época de incertidumbre, de cuestionamientos y frustraciones. No nos alcanza con lo que tenemos ni con lo que sabemos. Pero tenemos y sabemos muchas cosas, y estamos vislumbrando con mayor nitidez un horizonte alentador.

Como educadores, nos toca la inquietante tarea de recibir a los nuevos alumnos y de poner a disposición de todos y de cada uno de ellos nuestras mejores herramientas de indagación, de pensamiento y de creación. En el encuentro que se produce entre estudiantes y docentes reside la posibilidad de la transmisión, con todo lo que ello trae de renovación, de nuevos interrogantes, de replanteos y de oportunidades para cambiar el mundo en el que vivimos.

Lo prioritario hoy es recuperar y consolidar la enseñanza como oportunidad de construir otro futuro.

Frente a ese desafío y el de construir una sociedad más justa, las escuelas tienen encomendada una labor fundamental: transmitir a las nuevas generaciones los saberes y experiencias que constituyen nuestro patrimonio cultural. Educar es un modo de invitar a los niños y a los jóvenes a protagonizar la historia y a imaginar mundos cada vez mejores.

La escuela puede contribuir a unir lo que está roto, a vincular los fragmentos, a tender puentes entre el pasado y el futuro. Estas son tareas que involucran de lleno a los docentes en tanto trabajadores de la cultura. La escuela también es un espacio para la participación y la integración; un ámbito privilegiado para la ampliación de las posibilidades de desarrollo social y cultural del conjunto de la ciudadanía.

Cada día, una multitud de chicos y chicas ocupa nuestras aulas. Cada día, las familias argentinas nos entregan a sus hijos, porque apuestan a lo que podemos darles, porque confían en ellos y en nosotros. Y la escuela les abre sus puertas. Y de este modo no solo alberga a chicos y chicas, con sus búsquedas, necesidades y preguntas, sino también a las familias que, de formas heterogéneas, diversas, muchas veces incompletas, y también atravesadas por dolores y renovadas esperanzas, vuelven una y otra vez a depositar en la escuela sus anhelos y expectativas. Nuestros son el desafío y la responsabilidad de recibir a los nuevos, ofreciéndoles lo que tenemos y, al mismo tiempo, confiando en que ellos emprenderán la construcción de algo distinto, algo que nosotros quizás no imaginamos todavía.

En la medida en que nuestras aulas sean espacios donde podamos someter a revisión y crítica la sociedad que nos rodea, y garantizar el derecho de todos los niños, niñas, jóvenes y adultos de acceder a los saberes que, según creemos, resultan imprescindibles para participar en ella, podremos hacer de la educación una estrategia para transformarla.

La sanción de la Ley de Educación Nacional inscribe en el plano legal ese sentido de apuesta por un futuro más justo, y plasma en sus principios y decisiones fundamentales, un fuerte compromiso de los Estados nacional y provinciales por construir ese horizonte de igualdad al que aspiramos como ciudadanos. La definición de los Núcleos de Aprendizajes Prioritarios forma parte así de una política educativa que, en la firme perspectiva de un mediano plazo, busca garantizar una base común de saberes para todos los chicos del país. Detrás de esta decisión, existe una selección deliberada de conocimientos fundada en apreciaciones acerca de cuáles son las herramientas conceptuales que mejor condensan aquello que consideramos valioso transmitir en la escuela. También, una intención de colocar la enseñanza en el centro de la deliberación pública sobre el futuro que deseamos y el proyecto social de país que buscamos.

Es nuestro objetivo hacer de este conjunto de saberes y del trabajo en torno a ellos una oportunidad para construir espacios de diálogo entre los diversos actores preocupados por la educación, espacios que abran la posibilidad de desarrollar un lenguaje y un pensamiento colectivos; que incorporen la experiencia y los deseos de nuestros maestros y maestras, y que enfrenten el desafío de restituir al debate pedagógico su carácter público y político.

Lic. Alejandra Birgin
Subsecretaria de Equidad
y Calidad Educativa

Lic. Daniel Filmus
Ministro de Educación,
Ciencia y Tecnología

Para dialogar con los Cuadernos para el aula

La serie *Cuadernos para el aula* tiene como propósito central aportar al diálogo sobre los procesos pedagógicos que maestros y maestras sostienen cotidianamente en las escuelas del país, en el trabajo colectivo de construcción de un suelo compartido y de apuesta para que chicos y chicas puedan apropiarse de saberes valiosos para comprender, dar sentido, interrogar y desenvolverse en el mundo que habitamos.

Quienes hacemos los *Cuadernos para el aula* pensamos en compartir, a través de ellos, algunos "hilos" para ir construyendo propuestas para la enseñanza a partir de los Núcleos de Aprendizajes Prioritarios. Así, estos Cuadernos buscan tramar algunos saberes priorizados en múltiples itinerarios de trabajo, dejando puntas y espacios siempre abiertos a nuevos trazados, buscando sumar voces e instancias de diálogo con variadas experiencias pedagógicas. No nos mueve la idea de hacer propuestas inéditas, de "decir por primera vez". Por el contrario, nos mueve la idea de compartir algunos caminos, secuencias o recursos posibles; sumar reflexiones sobre algunas condiciones y contextos específicos de trabajo; poner a conversar invenciones de otros; abrir escenas con múltiples actores, actividades, imágenes y lecturas posibles.

Con ese propósito, el Ministerio Nacional acerca esta serie que progresivamente se irá nutriendo, completando y renovando. En esta oportunidad, damos continuidad a la colección presentando un nuevo libro para el Nivel Inicial y uno para cada campo de conocimiento priorizado para el Segundo Ciclo de la EGB/Nivel Primario: uno de Lengua, uno de Matemática, uno de Ciencias Sociales y uno de Ciencias Naturales para cada año/grado. En tanto propuesta abierta, los *Cuadernos para el aula* también ofrecen aportes vinculados con otros saberes escolares. En esta oportunidad, se suma una propuesta para trabajar en los dos primeros ciclos de la escolaridad primaria en el área Tecnología. En todos los casos, siempre incluyendo reflexiones que traman los aspectos específicos de las disciplinas escolares con reflexiones sobre temas pedagógico-didácticos que constituyen renovadas preocupaciones sobre la enseñanza.

Sabemos que el espacio de relativa privacidad del aula es un lugar donde resuenan palabras que no siempre pueden escribirse, que resisten todo plan: espacio abierto al diálogo, muchas veces espontáneo, otras ritualizado, donde se condensan novedades y rutinas, silencios y gestos, lugar agitado por preguntas o respuestas impensadas o poco esperadas, lugar conocido y enigmático a la vez, lugar de la prisa. En esos vaivenes de la práctica, paradójicamente tan reiterativa como poco previsible, se trazan las aristas que definen nuestra compleja identidad docente. Una identidad siempre cambiante -aunque imperceptiblemente- y siempre marcada por historias institucionales del sistema educativo y sociocultural más general; una identidad que nos hace ser parte de un colectivo docente, de un proyecto pedagógico, generacional y ético-político.

Desde los *Cuadernos para el aula*, como seguramente podrá ocurrir desde muchas otras instancias, nos proponemos poner en foco las prácticas desplegadas cada día. En ese sentido, la regulación y el uso del tiempo y el espacio en el aula y fuera de ella, las formas que asumen la interacción entre los chicos y chicas, las formas en que los agrupamos para llevar adelante nuestra tarea, la manera en que presentamos habitualmente los conocimientos y las configuraciones que adopta la clase en función de nuestras propuestas didácticas construidas para la ocasión son dimensiones centrales de la vida en el aula; una vida que muchas veces se aproxima, otras niega y otras enriquece los saberes cotidianos que construyen los chicos en sus ámbitos de pertenencia social y cultural.

Queremos acercarnos a ese espacio de las prácticas con una idea importante.

Las propuestas de los *Cuadernos para el aula* dialogan a veces con lo obvio, que por conocido resulta menos explorado. Pero al mismo tiempo parten de la idea de que no hay saberes pedagógico-didácticos generales o específicos que sean universales y por tanto todos merecen repensarse en relación con cada contexto singular, con cada historia de maestro y de hacer escuela.

Este hacer escuela nos reúne en un tiempo en el que subsisten profundas desigualdades. Nuestra apuesta es aportar a superarlas en algún modesto sentido, con conciencia de que hay problemas que rebasan la escuela, y sobre los cuales no podemos incidir exclusivamente desde el trabajo pedagógico. Nuestra apuesta es contribuir a situarnos como docentes y situar a los chicos en el lugar de ejercicio del derecho al saber.

Desde ese lugar hablamos en relación con lo prioritario hoy en nuestras escuelas y aulas; desde ese lugar y clave de lectura, invitamos a recorrer estos Cuadernos. Sabemos que es en el patio, en los pasillos, en la sala de maestros y maestras y en cada aula donde se ponen en juego novedosas búsquedas, y también las más probadas respuestas, aunque las reconozcamos tentativas. Hay siempre un texto no escrito sobre cada práctica: es el texto de la historia por escribir de los docentes en cada escuela.

Esta serie precisamente pretende ser una provocación a la escritura. Una escritura que lea y recree, una escritura que discuta, una escritura que dialogue sobre la enseñanza, una escritura que seguirá agregando páginas a estos Cuadernos.

El equipo de *Cuadernos para el aula*

Índice

Enseñar Matemática en el Segundo Ciclo

Enseñar Matemática en el Segundo Ciclo

Palabras previas

Quienes enseñamos necesitamos revisar permanentemente qué hacemos y para qué lo realizamos. Sabemos, por una parte, que cada una de nuestras experiencias tiene características singulares e irrepetibles; así, cada año, un nuevo grupo de alumnos nos plantea un desafío renovado. Por otra parte, los conocimientos que enseñamos y nuestras estrategias de enseñanza también se modifican; y son, además, cajas de resonancia de múltiples transformaciones y necesidades que tienen lugar en la sociedad, en sentido amplio y, en particular, en los campos de saber.

Por eso, en estas páginas volvemos sobre ciertos aspectos de la tarea de enseñar que seguramente no son nuevos, pero sí centrales para promover mejores aprendizajes.

Preguntarse qué significa aprender Matemática; qué se entiende por enseñar mediante la resolución de problemas y qué se concibe como problema; analizar cómo influye la gestión de la clase en el tipo de aprendizaje que logren los alumnos; estar actualizado respecto de algunos avances de las investigaciones didácticas; todo ello puede ayudarnos a realizar una relectura de las prácticas habituales, encontrar nuevos sentidos para lo que hacemos y reinventar así nuestras propuestas.

Pensar la actividad matemática en la ciencia y en la escuela

El conocimiento matemático, como ocurre con otros conocimientos y con las producciones culturales en general, ha ido generándose y transformándose en diferentes momentos históricos, en diálogo permanente con problemas que tienen lugar en los distintos entornos sociales y culturales.

Cuando se quiere estudiar una determinada situación o interactuar con ella desde la Matemática, se formulan preguntas que pueden referirse tanto al mundo natural y social como a la misma Matemática. Para responderlas, se utilizan **modelos matemáticos** conocidos o se elaboran conjeturas y se producen nuevos modelos. En todos, las conclusiones que se elaboran se interpretan para determinar si responden o no a las preguntas planteadas inicialmente.

También forma parte de este proceso mejorar la eficacia de los modelos que se crean y de las formas de comunicar los descubrimientos, así como establecer relaciones entre lo nuevo y lo que ya se conoce.

El proceso de construcción y las conclusiones resultantes tienen rasgos específicos: un modo particular de pensar y proceder, y conocimientos con características particulares. Estos conocimientos permiten **anticipar** el resultado de algunas acciones sin realizarlas efectivamente. Por ejemplo, para determinar *de cuántas formas distintas puedo combinar 5 entradas, 12 platos centrales y 10 postres diferentes en un restaurante,* es posible calcular el producto 5 x 12 x 10 sin necesidad de armar las diferentes posibilidades y contarlas. Por otra parte, los resultados se consideran **necesariamente verdaderos** si, para obtenerlos, se han respetado reglas matemáticas. Por ejemplo, para la multiplicación planteada en el problema anterior, se puede justificar que 5 x 12 x 10 = 5 x 2 x 6 x 10 = (5 x 2) x x 10 x 6 = 10 x 10 x 6, aplicando propiedades de la multiplicación. En el mismo sentido, al trabajar con figuras en geometría es posible afirmar, aun sin hacer ningún dibujo, que si se construye un cuadrilátero cuyas diagonales son distintas, este no puede ser un cuadrado pues, si lo fuera, tendría sus diagonales iguales.

A la vez, la obtención de nuevos resultados conlleva la necesidad de crear un lenguaje para comunicarlos. Los números, las figuras y las relaciones tienen **representaciones** cuyo uso se conviene entre los matemáticos.

De esta manera, la actividad matemática en la ciencia está muy fuertemente ligada a la resolución de problemas y a un modo particular de razonar y comunicar los resultados.

Esta forma de trabajar en Matemática debería ser también la que caracterice la actividad en el aula desde los inicios de la escolaridad. Se trata de que los alumnos **entren en el juego matemático,** es decir, que se ocupen de producir conocimientos nuevos (para ellos) frente a los problemas que se les planteen, y que debatan para validarlos. Luego, con la intervención del maestro, los reconocerán como conocimientos que forman parte de la Matemática. Así, en la escuela, los niños deberían ser introducidos en la cultura matemática, es decir, en las formas de trabajar "matemáticamente".

Desde esta perspectiva, entendemos que **saber Matemática** requiere dominar los conocimientos de esta disciplina para utilizarlos como instrumentos en la resolución de problemas, y también para definirlos y reconocerlos como objetos de una cultura.

Reconsiderar el sentido de la Matemática en la escuela

La concepción que cada persona se va formando de la Matemática depende del modo en que va conociendo y usando los conocimientos matemáticos. En este proceso, la escuela tiene un rol fundamental, ya que es allí donde se enseña y se aprende de un modo sistemático a usar la Matemática. El tipo de trabajo que se realice en la escuela influirá fuertemente en la relación que cada persona construya con esta ciencia, lo que incluye el hecho de sentirse o no capaz de aprenderla.

Cuando la enseñanza de la Matemática, en lugar de plantearse **como la introducción a la cultura de una disciplina científica,** se presenta solo como el dominio de una técnica, la actividad en el aula se limita a reconocer, luego de las correspondientes explicaciones del maestro, qué definición usar, qué regla hay que aplicar o qué operación "hay que hacer" en cada tipo de problema. Se aprende qué hacer, pero no para qué hacerlo ni en qué circunstancia hacer cada cosa. Esta enseñanza ha derivado en dificultades que ya conocemos: por una parte, aunque permite que algunos alumnos logren cierto nivel de "éxito", cuando el aprendizaje se evalúa en términos de respuestas correctas para problemas tipo, deja afuera a muchos alumnos que no se sienten capaces de aprender Matemática de este modo. Por otra parte, lo así aprendido se demuestra claramente insuficiente en el momento en que se trata de usar los conocimientos para resolver situaciones diferentes de aquellas en las que se aprendieron.

Otras veces, la actividad en el aula incluye la resolución de problemas diversos, y se pasa de uno a otro y a otro sin un trabajo reflexivo que vuelva sobre lo realizado. Trabajar solo resolviendo problemas, sin explicar o fundamentar "matemáticamente", también es insuficiente. El trabajo que implica volver sobre lo realizado, por uno mismo o por los compañeros, exige siempre una explicitación, un reconocimiento y una sistematización del conocimiento que se pone en juego en la resolución de los problemas, en las formas de obtenerlo y de validarlo. Sin este proceso, los conocimientos matemáticos aprendidos en la escuela (las nociones y las formas de trabajar en Matemática) no tendrán, a futuro, las mismas posibilidades de reutilización, ya que quedarían asociados a su uso en algunos casos particulares.

En síntesis, "cómo" se hace Matemática en el aula define, al mismo tiempo, "qué" Matemática se hace, y "para qué" y "para quiénes" se la enseña, lo que plantea una disyuntiva central en relación con la construcción de las condiciones que posibilitan el acceso a la Matemática de unos pocos o de todos.

Priorizar un tipo de trabajo matemático

Resulta pues vital que prioricemos en la escuela, desde el momento en que los niños se inician en el estudio de la Matemática, la **construcción del sentido** de los conocimientos por medio de la resolución de problemas y de la reflexión sobre estos, para promover así un modo particular de trabajo matemático que esté al alcance de todos los alumnos y que suponga para cada uno:

- Involucrarse en la resolución del problema presentado, vinculando lo que se quiere resolver con lo que ya se sabe y plantearse nuevas preguntas.

- Elaborar estrategias propias y compararlas con las de sus compañeros considerando que los procedimientos incorrectos o las exploraciones que no los llevan al resultado esperado son instancias ineludibles y necesarias para el aprendizaje.
- Discutir sobre la validez de los procedimientos realizados y de los resultados obtenidos.
- Reflexionar para determinar qué procedimientos fueron los más adecuados o útiles para la situación resuelta.
- Establecer relaciones y elaborar formas de representación, discutirlas con los demás, confrontar las interpretaciones sobre ellas y acerca de la notación convencional.
- Elaborar conjeturas, formularlas, comprobarlas mediante el uso de ejemplos o justificarlas utilizando contraejemplos o propiedades conocidas.
- Reconocer los nuevos conocimientos y relacionarlos con los ya sabidos.
- Interpretar la información presentada de distintos modos, y pasar de una forma de representación a otra según su adecuación a la situación que se quiere resolver.
- Producir textos con información matemática avanzando en el uso del vocabulario adecuado.

Elegir los problemas

Estamos afirmando que el sentido de los conocimientos matemáticos se construye al resolver problemas y reflexionar sobre ellos. Esto nos plantea, en principio, algunos interrogantes centrales: ¿qué problemas presentamos?, ¿cómo conviene seleccionar el repertorio de actividades para un determinado contenido y un grupo particular de alumnos?

En principio, la posibilidad de dominar una noción matemática con suficiente nivel de generalidad como para poder utilizarla en distintas situaciones dependerá de que la variedad de problemas considerados al estudiarla sea representativa de la diversidad de contextos de uso, de significados y de representaciones asociados a la noción. También habrá que tener en cuenta que la noción que se quiere enseñar surja como una "herramienta necesaria" para resolver el problema y no como una definición que hay que aplicar, y que la presentación de la información no fomente ideas estereotipadas acerca de los modos de resolución.

Consideramos que cada actividad constituye un **problema matemático** para un alumno en la medida en que involucra un enigma, un desafío a sus conocimientos matemáticos, es decir, si estos le permiten iniciar la resolución del problema y, para hacerlo, elabora un cierto procedimiento y pone en juego las nociones que tiene disponibles, modificándolas y estableciendo nuevas relaciones.

En este sentido, la actividad que puede resultar problemática para un alumno no lo es necesariamente para otro, puesto que depende de los conocimientos de que dispone. Así, para atender la heterogeneidad en cada grupo de alumnos respecto de sus conocimientos iniciales y dar a todos la posibilidad de construir una solución es necesario plantear buenas preguntas, confiar en que todos los niños pueden responderlas de algún modo, admitir diferentes procedimientos y, luego, trabajar con los conocimientos que surjan para avanzar hacia los que se quiere enseñar por medio del planteo de nuevas preguntas.

Los contextos

Se parte de la idea de que una noción matemática cobra sentido a partir del conjunto de problemas en los cuales resulta un instrumento eficaz de resolución.

Esos problemas constituyen el o los contextos para presentar la noción a los alumnos. Por ejemplo, el cálculo de puntos en un juego, la construcción de una figura, la elaboración de un procedimiento para realizar un cálculo son contextos posibles para presentar la suma, los rectángulos o la propiedad conmutativa.

Para cada noción es posible considerar diferentes contextos que nos permitan plantear problemas en los que la resolución requiera su uso. Estos contextos podrán ser matemáticos o no, incluyendo entre estos últimos los de la vida cotidiana, los ligados a la información que aparece en los medios de comunicación y los de otras disciplinas.

Por ejemplo, la noción de multiplicación de decimales es frecuentemente tratada por medio de la resolución de problemas, como *¿Cuál es el precio de 2,5 kg de carne sabiendo que el kg vale $ 8,7?* En este caso, se trata de un **contexto no matemático** de la vida cotidiana. También habrá que plantear que *calculen el área de un rectángulo de 2,5 de base y 8,7 de altura* (expresadas en una unidad arbitraria de longitud), que también requiere realizar una multiplicación. En este caso se trata de un **contexto matemático.** En los dos casos, la multiplicación es el instrumento que resuelve el problema: la noción está contextualizada y "funciona" en esos casos particulares.

En este sentido, al producir la solución, el alumno sabe que en ella hay conocimiento matemático, aunque no logre identificar cuál es. Para que pueda reconocerlo, tendremos que intervenir nombrando las nociones del modo en que se usa en la disciplina y reformulando las conclusiones alcanzadas por el grupo con representaciones lo más próximas posibles a las convencionales, es decir reconociendo como conocimientos matemáticos los que se usaron como instrumento de resolución, ahora independientemente del contexto. Asimismo, se podrán relacionar esos conocimientos con otros que fueron trabajados anteriormente.

Al presentar cada noción en diferentes contextos, y descontextualizarla cada vez, se amplía el campo de problemas que los alumnos pueden resolver con ella. De este modo, con cada nuevo problema, los chicos avanzan en la construcción de su sentido.

En todos los casos, los contextos tendrán que ser **significativos** para los alumnos, es decir que implicarán un desafío que puedan resolver en el marco de sus posibilidades cognitivas y sus experiencias sociales y culturales previas. Asimismo, los conocimientos involucrados en el problema deberán cobrar interés para ellos y ser coherentes desde el punto de vista disciplinar.

Al interactuar en su vida social, los niños aprenden las prácticas habituales de cada comunidad y construyen saberes, algunos de los cuales están ligados a la Matemática. Son estos saberes los que debemos recuperar en la escuela para vincularlos con los conocimientos que deben aprender, ya sea para reconocerlos como parte de ellos y sistematizarlos, como para utilizarlos en nuevos contextos. De este modo, es esperable que los alumnos puedan incorporar en su vida cotidiana nuevas prácticas superadoras y valorar el aporte brindado por la escuela para su adquisición.

Los resultados de investigaciones realizadas sobre el uso de conocimientos matemáticos en situaciones de la vida cotidiana, como hacer compras de alimentos, dan cuenta de los múltiples factores que determinan las decisiones que tomamos acerca de "cuánto" compramos y muestran que a veces no utilizamos conocimientos matemáticos. Por ejemplo, tenemos en cuenta las preferencias o necesidades de los integrantes de la familia y no sólo la relación precio/cantidad o restringimos la compra a la cantidad de dinero disponible. Al formular ese tipo de problemas con propósitos de enseñanza, seleccionamos algunos datos que intervienen en la situación o contexto real. Así, las relaciones que se establecen entre los datos para encontrar la respuesta están más relacionadas con los conocimientos que se quieren enseñar que con la situación real que da origen al problema.

Al elegir los problemas, también es esencial revisar los enunciados y las preguntas que presentamos, pues muchas veces se incluyen preguntas que carecen de sentido en sí mismas, pues no aluden a problemas reales o verosímiles. Por ejemplo, si en un enunciado se habla de la suma de las edades de dos hermanos o de la cantidad de hormigas de dos hormigueros, cabe preguntarse quién puede necesitar estos valores y para qué.

Un contexto muy utilizado en la clase de Matemática es el de los juegos. El sentido de incluirlo va más allá de la idea de despertar el interés de los alumnos. Jugar permite "entrar en el juego" de la disciplina matemática, pues se eligen arbitrariamente unos puntos de partida y unas reglas que todos los participantes acuerdan y se comprometen a respetar. Luego, se usan estrategias que anticipan el resultado de las acciones, se toman decisiones durante el juego y se realizan acuerdos frente a las discusiones.

No debemos perder de vista que, al utilizar el juego como una actividad de aprendizaje, la finalidad de la actividad para el alumno será ganar, pero nuestro propósito es que aprenda un determinado conocimiento. Por eso, el hecho de jugar no es suficiente para aprender: la actividad tendrá que continuar con un momento de reflexión durante el cual se llegará a conclusiones ligadas a los conocimientos que se utilizaron durante el juego. Luego, convendrá plantear problemas de distinto tipo en los que se vuelvan a usar esos conocimientos: partidas simuladas, nuevas instancias de juego para mejorar las estrategias, tareas a realizar con los conocimientos descontextualizados.

Los significados

Cada noción matemática resuelve un cierto conjunto de problemas; sin embargo, no tiene el mismo significado en todos los casos. Por ejemplo, el número racional 3/4 es respuesta a distintos problemas. Veamos algunos: *Si de 4 bolitas, 3 son negras, ¿qué parte de las bolitas es negra?; María tiene 3 tortas para repartir en partes iguales entre sus 4 hijos, ¿cuánto come cada uno?; si el segmento A mide 3 cm y el segmento B mide 4 cm, ¿cuál es la medida de A en relación a B?* En estos problemas se establecen diferentes relaciones entre las cantidades involucradas. En el primer problema, 3/4 representa la relación entre una parte (en este caso subconjunto de cardinal 3) con el todo (conjunto de cardinal 4). En el segundo problema, 3/4 indica el resultado de dividir 3 entre 4 (en este caso repartir 3 entre 4), mientras que en el tercer problema, indica la medida de un objeto, resultado de la comparación entre los tamaños del segmento A y del segmento B.

Cada uno de estos significados exige y pone en funcionamiento aspectos diversos del concepto de número racional y también de distinto orden de complejidad. Esto obliga a pensar en cómo es posible organizar su abordaje en el tiempo.

A lo largo de su recorrido por el Segundo Ciclo, los alumnos deben ir trabajando con estos significados, pero a su vez en cada uno de ellos se requiere del planteo de distintos problemas que permita tratar aspectos relativos al orden de racionales, a la equivalencia, a la operatoria aditiva y multiplicativa. Esto indica que para cada significado es necesaria la construcción de un conjunto de problemas de diferentes niveles de complejidad.

Las representaciones

En el conjunto de problemas que seleccionamos también es necesario tener en cuenta las distintas representaciones posibles de la noción que queremos enseñar, ya que la posibilidad de avanzar en la comprensión de una noción implica reconocerla en sus distintas representaciones pudiendo pasar de una a otra y elegir la más conveniente en función del problema a resolver.

Es importante señalar que, por ejemplo, cuando no se articulan las distintas representaciones del mismo número racional, muchos niños conciben "las fracciones" como objetos distintos de "los números decimales". Para representar un mismo número racional se pueden escribir las siguientes expresiones: 1 + 1/2; 1 1/2; 3/2; 3 x 1/2; 1,5 y 1,50, utilizar la recta numérica, establecer equivalencias con otras expresiones fraccionarias y decimales o expresiones como: 1 + 5 x 1/10 o 150%. Sin embargo, y aunque podrían ser usadas indistintamente en tanto refieren al mismo número, los contextos de uso y las estrategias de cálculo suelen determinar la conveniencia de utilizar una u otra representación.

Otras representaciones de las fracciones que suelen aparecer en las producciones de los alumnos son distintas formas gráficas, como círculos o rectángulos. En estos casos, deberían ser analizadas en el grupo, socializadas, para darles un lugar entre los conocimientos construidos en la clase y, posteriormente, incluirlas en las actividades que presentemos. El tiempo que aparentemente se "pierde" en este trabajo de analizar las representaciones en función del problema que se está resolviendo, se "gana" en la significatividad que cobran para el alumno. Del mismo modo, el uso o no de materiales "concretos" debería ser decidido por el alumno en función de sus necesidades, que estarán ligadas al estado de sus conocimientos.

Asimismo, en Geometría, para representar una figura se usan dibujos, textos que describen el conjunto de propiedades que cumple e instructivos que permiten construirla. Durante este Ciclo, habrá que propiciar discusiones acerca de las características de estas distintas representaciones, y la transformación de una en otra, para que los alumnos avancen en la conceptualización de los objetos matemáticos y los diferencien de sus representaciones. En este caso, el obstáculo fundamental es la identificación de una figura con un dibujo particular.

Al plantear los problemas, deberemos promover que la representación que cada alumno utilice sea una forma de expresar lo que está pensando, y que el debate posterior a las producciones sobre la pertinencia y economía de estas permita su evolución hacia las representaciones convencionales. Que los alumnos vayan evolucionando en el uso de las representaciones será una tarea a largo plazo.

Las relaciones entre preguntas y datos

Algunos de los problemas que se presentan y funcionan como contexto para utilizar una noción permiten trabajar lo que denominamos **tratamiento de la información.** En estos casos, tanto para los contenidos del Eje "Número y Operaciones", como para el de "Geometría y Medida", lo que se pone en juego es la relación entre las preguntas y la construcción de datos para responderlas.

Muchas veces, detectamos que los alumnos intentan resolver un problema aritmético buscando la operación que deben realizar para solucionarlo. Esa forma de enfrentarse al problema está fomentada por la estructura y el contenido de muchos enunciados que forman parte de la tradición escolar y por el tratamiento que se les da en clase. En ellos suelen aparecer todos los datos necesarios para responder a la pregunta que se hace y esta se refiere al resultado de una operación entre ellos. En muchos casos, además, el maestro que ya enseñó los cálculos propone a los alumnos que identifiquen “la” operación y espera que resuelvan el problema sin dificultad.

La resolución de problemas requiere, en cambio, generar en los chicos la necesidad de leer e interpretar el enunciado o la información que se presenta para construir una representación mental de la situación que les permita plantearse alguna estrategia inicial para su resolución. Esta necesidad se puede instalar variando tanto la forma de presentación del enunciado como el tipo de tarea que el alumno debe realizar, e incluyendo problemas que tengan una, varias o ninguna solución.

Los enunciados pueden ser breves relatos o textos informativos de otra área de conocimiento, tener datos “de más” e incluir imágenes. Las preguntas también serán variadas: algunas no se podrán contestar, otras se contestarán con un dato y sin operar, y otras requerirán hacer una operación, pero la respuesta podrá ser una información diferente del resultado de la misma. También los alumnos podrán proponer problemas, para lo cual se puede dar información y pedir que formulen preguntas o presentar datos y respuestas para elaborar una pregunta que los relacione. A la vez, tendremos que organizar la clase de modo que cada alumno pueda interpretar el problema y tomar una primera decisión autónoma a propósito de su resolución.

En Geometría, la tradición escolar sólo incluye problemas para el caso de cálculos de medidas, como el perímetro, la superficie y el volumen, y su tratamiento es el mismo que el mencionado.

La propuesta de este enfoque es problematizar el trabajo con las construcciones, considerándolas un medio para conocer las propiedades geométricas. En este sentido, las actividades de reproducción de figuras permiten a los alumnos poner en juego en forma implícita las propiedades involucradas y avanzar luego hacia otras que requieran su explicitación. Además, en Segundo Ciclo es importante proponer problemas con una, varias o ninguna solución, como por ejemplo determinar cuáles son las figuras que cumplen un conjunto de condiciones iniciales.

Construir condiciones para resolver problemas

Para que cada alumno se involucre en el juego matemático, además de elegir un problema desafiante pero adecuado para sus conocimientos, y en el que la noción a enseñar sea un instrumento eficaz de resolución, es necesario tener en cuenta un conjunto de condiciones: cuáles son los materiales necesarios, qué interacciones prevemos derivadas de la forma de organizar la clase y nuestras intervenciones durante su transcurso.

Cuidar estas condiciones, anticiparlas al planificar la clase, es, en realidad, uno de nuestros grandes desafíos como maestros.

Las situaciones de enseñanza

En algunas ocasiones, la tarea que se propone al alumno puede presentarse sólo mediante el enunciado de un problema o con una pregunta para un conjunto bien elegido de cálculos o con un interrogante que deba ser respondido a partir de una información publicada en el diario o en un texto de Ciencias Naturales o de Ciencias Sociales. En otras ocasiones, habrá que proporcionar los instrumentos de Geometría para realizar una construcción o los materiales para un juego –por ejemplo dados y tablas para anotar puntajes–, el croquis de un recorrido, un mapa, etc. En todos los casos, una primera condición es asegurarnos de tener disponibles los **materiales** a utilizar.

También habrá que anticipar cuál es el **tipo de interacciones** que queremos que se den para organizar distintos momentos de la clase: las de cada alumno y el problema, las de los alumnos entre sí y las de los alumnos con el maestro. Para ello, habrá que proponer, según convenga y de manera no excluyente, momentos de trabajo en forma individual, en pequeños grupos o con toda la clase.

Los niños podrán realizar diferentes tareas. En algunas ocasiones, trabajarán usando los conocimientos matemáticos de manera implícita, sin nombrarlos ni escribirlos, por ejemplo, al medir, construir, decidir cómo jugar o calcular. En otras, utilizarán los conocimientos matemáticos de manera explícita: tendrán que describir cómo midieron o calcularon, qué instrumentos usaron para construir y qué hicieron en cada paso, o producirán un instructivo para que otro construya una figura o realice un cálculo, explicarán por qué decidieron utilizar un procedimiento u otro, cómo pueden comprobar que un resultado es adecuado. También darán razones para convencer a otro compañero de que los números encontrados o las figuras dibujadas cumplen con las condiciones del problema; tendrán que argumentar sobre si un procedimiento es o no correcto. En otras oportunidades, será el maestro el que presente una afirmación para que los alumnos discutan sobre su validez.

En Segundo Ciclo, es importante también que los alumnos comiencen a analizar el **nivel de generalidad** que tienen las respuestas a los problemas que resuelven. Así, comprobar que se pueden obtener dos triángulos iguales plegando un cuadrado de papel glasé no es suficiente para afirmar que las diagonales de cualquier cuadrado son congruentes. Asimismo, habrá que descubrir y explicitar que algunas afirmaciones son verdaderas en un campo numérico, o para un conjunto de figuras, y no lo son para otros. Por ejemplo, el producto de una multiplicación es mayor que cualquiera de sus factores, siempre que se opera con números naturales, pero esto no es cierto si, por ejemplo, los factores son números racionales menores que 1.

Al anticipar el desarrollo de la clase y prever las condiciones necesarias para que ocurran las interacciones que nos interesan, diseñamos una **situación problemática** a propósito del conocimiento que queremos enseñar. Esta situación incluye un conjunto de elementos y relaciones que estarán presentes en la clase: el problema, los materiales, una cierta organización del grupo, un desarrollo con momentos para diferentes intercambios. Al planificar, también anticipamos los diferentes procedimientos y las representaciones que podrán usar los alumnos, nuestras preguntas y las conclusiones matemáticas posibles.

La gestión de la clase

Hemos planteado ya que, para que los alumnos desarrollen el tipo de trabajo matemático que buscamos promover, serán fundamentales las intervenciones del docente durante la clase.

El trabajo de resolución de problemas que se propone en este enfoque genera muchas veces inseguridad. Pensamos: *¿cómo voy a presentar este problema si no muestro antes cómo hacerlo?*, *¿cómo voy a organizar la clase si cada uno responde de una manera distinta?* o *¿cómo voy a corregir si hay distintos procedimientos en los cuadernos?* Respecto de la primera pregunta, para iniciar el aprendizaje de un nuevo conocimiento en el proyecto de cada año escolar tendremos que **presentar un problema** asegurándonos de que todos hayan comprendido cuál es el desafío que se les propone. Para que cada alumno acepte ocuparse de él, es esencial generar el deseo de resolverlo. Este tipo de intervención, que busca que el alumno se haga cargo de la resolución, es siempre parte del inicio de la clase, pero puede reiterarse en distintos momentos, toda vez que sea necesario y oportuno. Es una invitación para que el chico resuelva por sí solo y no una orientación sobre cómo debe hacerlo o qué debe hacer.

Para comenzar, los niños lo **resuelven** de manera individual o en pequeños grupos, con diferentes procedimientos, según los conocimientos de los que dispone cada uno. Por ejemplo, en 4º año/grado, aunque aún no se haya trabajado sobre las cuentas de dividir es posible plantear a los niños un problema como: *Los lápices se venden en paquetes de a 10, ¿cuántos paquetes se deben comprar para dar un lápiz a los 127 niños de la escuela? ¿Y si fueran 250 niños?* Los niños podrán recurrir a una variedad de procedimientos para resolverlo: procedimientos aditivos o sustractivos, de a diez, de a dobles; o procedimientos multiplicativos.

Luego, habrá que dar lugar a un **intercambio** donde participen todos los alumnos y en el que se vayan explicando las diferentes aproximaciones al conocimiento que se quiere enseñar, y debatir sobre ellas. Al analizar las diferentes soluciones, tendremos que valorizar de igual modo todas las producciones, ya sea que permitan o no arribar a una respuesta al problema planteado.

Al dar lugar a la presentación y explicación de los procedimientos utilizados por los chicos, es necesario animarlos a **dar razones** de lo realizado, a explicar por qué lo hicieron de cierta forma, a argumentar sobre la validez de sus producciones. Esto les permitirá volver sobre lo que han pensado, para analizar sus aciertos y errores, y controlar, de este modo, el trabajo. Alentarlos a hablar o participar a aquellos que no lo hacen espontáneamente significa trabajar suponiendo que los chicos pueden progresar y no que van a fracasar.

En algún caso, recuperar todas las producciones escritas distintas, y presentarlas en conjunto para compararlas y discutir cómo mejorar cada una, puede contribuir a "despersonalizar" las mismas, focalizando el análisis en su validez o nivel de generalidad y no en los conocimientos de quienes las elaboraron. Así el "error" de unos se capitaliza en la reflexión de todos.

Este trabajo incorpora a los alumnos en el proceso de evaluación en un lugar diferente del habitual, donde quedan a la espera de la palabra del docente que les ratifica de inmediato si lo que hicieron está bien o no. Si han asumido como propia la tarea de resolución, querrán saber si lo producido es o no una respuesta a la pregunta que organizó el quehacer matemático en el aula. El debate del conjunto de la clase dará por válida o no una respuesta, y llevará a la modificación de los procedimientos que conducen a errores.

En un comienzo, las razones que los alumnos den al debatir se apoyarán en ejemplos, comprobaciones con materiales como plegar papeles o tomar medidas, entre otros casos, para luego avanzar hacia el uso de propiedades.

A la vez, estas últimas se enunciarán con distintos niveles de generalidad; por ejemplo, pasaremos de: *Podés hacer 4 + 3 y te da lo mismo que 3 + 4*, en el Primer Ciclo, a: *Al sumar es posible cambiar el orden de los números*, en el Segundo Ciclo.

Con la intervención del maestro, se reconocerán y sistematizarán los saberes que se van descubriendo. Esta tarea de establecer relaciones entre las conclusiones de la clase y el conocimiento matemático al que se pretende llegar, introduciendo las reglas y el lenguaje específicos, y entre los conocimientos ya incorporados y los nuevos, es una tarea que está siempre a cargo del maestro y que resulta imprescindible para que los alumnos identifiquen qué han aprendido. Para esto, no tenemos que basarnos en ningún esquema rígido. Esas intervenciones pueden darse en distintos momentos, siempre que sean oportunas; es decir que lleguen después de que los alumnos hayan desplegado sus propios razonamientos.

El camino propuesto no implica diluir la **palabra del maestro.** Cuando los chicos están resolviendo los problemas solos o con su grupo, el maestro podrá pasar cerca de cada uno, atendiendo lo que van haciendo, los términos que usan, lo que escriben, quiénes no participan y quiénes siguen atentamente –aun sin hablar– lo que hacen sus compañeros. De tal modo, el maestro tendrá un registro del conjunto de conocimientos que se despliegan en la clase. Esta información será fundamental para tomar decisiones en el momento del debate: ¿qué grupo conviene que hable primero?, ¿cuáles tienen una respuesta similar?,

¿qué procedimiento es el más potente para hacer avanzar el debate hacia el conocimiento que se espera enseñar? Esto permitirá optimizar el tiempo dedicado a la puesta en común, de manera que no resulte tediosa para los alumnos ya que, cuando los procedimientos son muy similares, bastará con tomar como objeto de análisis la producción de uno solo de los grupos.

El docente tampoco queda al margen del debate de la clase, puesto que es él quien lo conduce. A veces, las conclusiones a las que los chicos llegan en conjunto son parcialmente válidas. Allí, el maestro podrá decir, por ejemplo: *Por ahora acordamos que resolvemos así; en la próxima clase lo seguiremos viendo.* De esta manera, interviene en el proceso sin anticiparse, pero dejando marcas, planteando la provisoriedad de lo acordado o alguna contradicción que queda pendiente por resolver. Así, no invalidaremos el trabajo de la "comunidad clase", pero dejaremos instalado que hay alguna cuestión que hay que seguir discutiendo.

En relación con el modo de **organizar la clase** frente a las distintas respuestas y tiempos de trabajo de los niños, los docentes muchas veces planteamos situaciones para que sean resueltas por todo el grupo, lo que nos permite valorar, corregir, hacer señalamientos a las intervenciones de los alumnos.

Es cierto que es más fácil llevar adelante el trabajo colectivo sobre un único procedimiento, pero de este modo se corre el riesgo de que solo un grupo de alumnos participe activamente siguiendo al maestro, mientras otros se quedan al margen de la propuesta; y aunque todos lo siguieran, lo aprendido se limita a una única manera de pensar.

La alternativa que proponemos a la organización habitual de la clase, según nuestros objetivos, será organizar la actividad de distintas maneras: individual, por pares o grupos de más alumnos, y aun con distintos tipos de tareas para cada grupo o dentro del mismo grupo, alentando la movilidad de los roles y estando atentos a la posible configuración de estereotipos que, lamentablemente, algunas veces hacen que la discriminación se exprese en la clase de Matemática. Tanto los momentos de trabajo individual como los compartidos en grupo aportan al alumno un tipo de interacción diferente con el conocimiento, por lo que ambos deberán estar presentes en la clase.

Muchas veces, cuando estamos a cargo de un **plurigrado**, separamos a los niños según el año/grado que cursan, y vamos atendiendo a un grupo por vez. Sin embargo, a la hora de realizar adaptaciones a las actividades presentadas, es importante tener en cuenta el enfoque de enseñanza, de manera de no perder la riqueza de las propuestas que ofrecemos. Por ejemplo, para alcanzar determinados aprendizajes, es indispensable generar espacios de debate en los que deberían participar alumnos que compartan repertorios de conocimientos y niveles de análisis similares. Sin embargo, ocurre muy frecuentemente que en estos escenarios haya solo uno o que sean muy pocos los alumnos en alguno de los años/grados, lo que hace imposible organizar un verdadero debate entre ellos. En estos casos, proponemos agrupar niños de varios años/grados y organizar actividades con un contexto común, proponiendo una tarea distinta a cada grupo, de modo que los desafíos sean adecuados a los distintos conocimientos de los alumnos. Esto permite que en el momento de la confrontación todos los alumnos puedan entender las discusiones que se originen e incluso puedan participar de las mismas, aunque no sean originadas por la actividad que le correspondió a su grupo. Por ejemplo, se podría proponer para grupos armados con niños de 4º, 5º y 6º año/grado un juego como “La escoba del uno”[1] de cartas con fracciones, diferenciando la complejidad a la hora de analizar las partidas simuladas.

En esta propuesta, **el cuaderno o la carpeta** tiene diferentes funciones: en él, cada chico ensaya procedimientos, escribe conclusiones que coinciden o no con su resolución y, eventualmente, registra sus progresos, por ejemplo, en tablas en las que da cuenta del repertorio de cálculos que ya conoce. De este modo, el cuaderno o la carpeta resultan un registro de la historia del aprendizaje y los docentes podemos recuperar las conclusiones que los alumnos hayan anotado cuando sea necesario para nuevos aprendizajes.

En este sentido, conviene además conversar con los padres que, acostumbrados a otros usos del cuaderno, pueden reclamar o preocuparse al encontrar en él huellas de errores que para nosotros juegan un papel constructivo en el aprendizaje. De todos modos, es recomendable discutir con el equipo de colegas de la escuela cómo se registra en el cuaderno la presencia de una producción que se revisará más adelante.

También el **pizarrón** tiene diferentes funciones. Allí aparecerá todo lo que sea de interés para el grupo completo de la clase, por ejemplo: los procedimientos que queremos que los alumnos comparen, escritos por un representante del grupo que los elaboró o por el maestro, según lo que parezca más oportuno. Convendrá usar también papeles afiche o de otro tipo para llevar el registro de las conclusiones, como tablas de productos, acuerdos sobre cómo describir una figura, etc., para que el grupo las pueda consultar cuando sea necesario.

Promover la **diversidad de producciones** es un modo de incluir a todos en el aprendizaje, de generar confianza en las propias posibilidades de aprender y de poner en evidencia la multiplicidad de formas de pensar frente a una misma cuestión, así como la necesidad de acordar cuáles se consideran adecuadas en función de las reglas propias de la Matemática.

---

[1] Actividad propuesta en este *Cuaderno*.

Es muy importante instalar en la escuela las condiciones necesarias para que los niños sientan que los **errores** y los **aciertos** surgen en función de los conocimientos que circulan en la clase, es decir que pueden ser discutidos y validados con argumentos y explicaciones. Es así como pretendemos que los niños vayan internalizando progresivamente que la Matemática es una ciencia cuyos resultados y progresos se obtienen como consecuencia necesaria de la aplicación de ciertas relaciones y del debate entre quienes las plantean, y no como una práctica de la adivinación o del azar o un saber que no sufre transformaciones.

De todos modos, sabemos que seleccionar problemas y secuencias de actividades que puedan ser abordadas por los alumnos de la clase con distintas herramientas, e intervenir convenientemente para que todos puedan avanzar, supone para nosotros una dificultad mucho mayor que la de presentar un problema que la mayoría resuelve de la misma manera. Quizá nos dé un poco de tranquilidad saber que a trabajar en grupo se aprende y que, en el inicio de este aprendizaje, hay que tolerar una cuota de desorganización, hasta que los alumnos incorporen la nueva dinámica.

Una cuestión ligada a la organización de la enseñanza que conviene tener en cuenta es la de articular, en cada unidad de trabajo, algún conjunto de actividades que formen una secuencia para desarrollar cierto contenido. El criterio que utilizamos al presentar algunos ejemplos en el apartado "Propuestas para la enseñanza" es que en cada nueva actividad de una misma secuencia se tome como conocimiento de partida aquel que haya sido sistematizado como conclusión en la anterior.

Otra cuestión también ligada a la elaboración de una unidad de trabajo, y que permite mejorar el **uso del tiempo de clase,** es la articulación de contenidos. Algunos contenidos relacionados con distintos NAP pueden abordarse en una misma unidad y aún en una misma secuencia. Por ello, es conveniente tener en cuenta que la presentación de los NAP no indica un orden de enseñanza y que, antes de armar las unidades, es indispensable tener un panorama de la totalidad de la propuesta.

Evaluar para tomar decisiones

En cuanto a los objetivos con que presentamos los problemas, podemos plantear distintas opciones: para introducir un tema nuevo, para que vuelvan a usar un conocimiento con el que trabajaron pero en un contexto distinto o con un significado o representación diferentes, o para recuperar prácticas ya conocidas que les permitan familiarizarse con lo que saben hacer y lo hagan ahora con más seguridad. Pero los problemas son también un tipo de tarea que plantearemos para evaluar.

Sin desconocer que cada maestro tomará decisiones de promoción y acreditación en función de acuerdos institucionales y jurisdiccionales sobre criterios y parámetros, queremos poner énfasis en la idea de que un sentido fundamental de la evaluación es recoger información sobre el **estado de los saberes de los alumnos,** para luego tomar decisiones que permitan orientar las estrategias de enseñanza.

Las producciones de los niños dan cuenta tanto de los resultados derivados de nuestras propias estrategias de enseñanza, como de lo que aprendieron y de sus dificultades.

El modo de trabajo propuesto en estas páginas introductorias permite tomar permanentemente información sobre qué saben los chicos acerca de lo que se ha enseñado o se desea enseñar. Los problemas seleccionados para iniciar cada tema pueden funcionar para tener algunos indicios de los conocimientos del grupo y considerarlos en un sentido diagnóstico para terminar de elaborar la unidad didáctica. De este modo, la evaluación diagnóstica, en lugar de focalizarse en el inicio del año, se vincula con la planificación de cada unidad y de cada secuencia de trabajo.

Al considerar las producciones de los alumnos, pueden aparecer errores de diferente origen, pero muchas veces los que llamamos "errores" no son tales. Algunos de ellos están vinculados con una distracción circunstancial, como copiar mal un número del pizarrón que sólo habrá que aclarar. Otros, en cambio, estarán mostrando una forma de pensar provisoria, por ejemplo, cuando los chicos dicen, frente al dibujo de un cuadrado, *Esta figura no es un rectángulo.* Esto último no es cierto si se considera que el cuadrado es un paralelogramo con cuatro ángulos rectos, condición que caracteriza a los rectángulos. Sin embargo, las primeras clasificaciones que realizan los niños parten de la idea de que un objeto pertenece a una única clase: si una figura es un cuadrado, no puede ser un rectángulo.

Frente a los "errores" descubiertos será necesario analizarlos, intentar comprender cómo y por qué se producen y plantear actividades de distinto tipo. Tanto en el caso de cuestiones presentes en las producciones de muchos alumnos del grupo como respecto de algunas ideas provisorias como las mencionadas respecto de la multiplicación de números racionales y de las relaciones entre cuadrado y rectángulo, habrá que volver sobre la noción involucrada en ese momento, cuestionándolos con ejemplos que contradigan sus ideas. No es evitando los "errores" como se acorta el proceso de aprendizaje, sino tomándolos como se enriquece.

Avanzar año a año en los conocimientos de Segundo Ciclo

La mayoría de las nociones matemáticas que se enseñan en la escuela llevan mucho tiempo de elaboración, por lo que es necesario delinear un recorrido precisando el punto de partida y atendiendo al alcance progresivo que debiera tener el tratamiento de las nociones en el aula.

El Eje "Número y Operaciones" incluye como aprendizajes prioritarios, durante el Segundo Ciclo, avanzar en el conocimiento del sistema de numeración y de fracciones y decimales; y en el uso de las operaciones y las formas de calcular con naturales, fracciones y decimales para resolver problemas. Al finalizar el Ciclo, se espera lograr que los chicos puedan analizar las relaciones entre las distintas clases de números y sus distintas representaciones, iniciando la sistematización de relaciones numéricas y propiedades de las operaciones.

Para ello, en relación con los **números naturales** y según lo abordado en el Primer Ciclo, en el Segundo Ciclo se parte de los conocimientos que los niños tienen sobre las relaciones entre la serie numérica oral y la serie numérica escrita hasta el orden de las unidades de mil y las vinculaciones entre la descomposición aditiva y la descomposición aditiva y multiplicativa de los números (456 se puede descomponer como 400 + 50 + 6 y como 4 x 100 + 5 x 10 + 6 x 1) para trabajar con números más grandes, analizando equivalencias de escrituras, procedimientos de orden y comparación basados en distintas representaciones y la conveniencia de una u otra, según el problema puesto en juego.

Con respecto a los **números racionales**, en 3er año/grado los niños han tenido aproximaciones a algunas fracciones y algunos decimales surgidas al abordar situaciones del Eje "Geometría y Medida". En 4º año/grado se usan expresiones fraccionarias y decimales de los números racionales asociadas a contextos que les dan significado, como el de la medida, el de sistema monetario, situaciones de reparto y partición, para resolver problemas de equivalencia, orden, comparación, suma y resta o producto por un natural. También se inicia el trabajo con problemas en contexto matemático que se profundiza en 5º y 6º años/grados.

A partir de 5º año/grado, se aborda la equivalencia entre expresiones fraccionarias y decimales, y se incluye la representación en la recta numérica. En 6º año/grado se incorpora la escritura porcentual y se avanza en la transformación de una expresión en otra, reconociendo además la conveniencia del uso de unas u otras según los problemas a resolver. Además, se inicia el reconocimiento de que las reglas del sistema de numeración estudiadas para los naturales se extienden a los racionales.

Otro aprendizaje prioritario del Eje "Número y Operaciones" es el de las **operaciones básicas,** tanto en relación con los problemas aritméticos que deben resolver los niños, como con las formas de calcular. En Segundo Ciclo, es esperable que los alumnos avancen en nuevos **significados** de la suma, la resta, la multiplicación y la división de los números naturales, y que calculen en forma exacta y aproximada con distintos procedimientos, incluyendo la construcción de otros más económicos. Este trabajo contribuirá a lo largo del ciclo a sistematizar relaciones numéricas y propiedades de cada una de las operaciones.

En particular, se iniciará en 5º año/grado la explicitación de las **relaciones de múltiplo/divisor** en la resolución de problemas, así como la relación entre dividendo, divisor, cociente y resto en contextos matemáticos.

También comienzan a tratarse en forma sistemática las **relaciones de proporcionalidad,** ligadas inicialmente a la operatoria multiplicativa y avanzando hacia el análisis de sus propiedades. Los problemas que incluyen la representación de un conjunto organizado de datos mediante gráficos estadísticos (gráficos de barras, circulares y de líneas) resultan de interés para enriquecer los contextos de uso de estas relaciones.

En relación con las **formas de calcular,** es importante considerar como inicio del trabajo el uso de diferentes procedimientos en función de los conocimientos disponibles de los alumnos sobre los números involucrados y sobre las operaciones, antes de analizar y utilizar procedimientos más económicos.

La evolución de las formas de calcular con números naturales dependerá de la disponibilidad que tengan los alumnos tanto del repertorio multiplicativo como de las propiedades, de las intervenciones del docente, y de las comparaciones y validaciones que se hagan de las distintas formas de calcular que conviven en la clase. En particular, el cálculo escrito de la división debiera evolucionar desde estrategias de sucesivas aproximaciones en 4º año/grado, hasta lograr aproximaciones al dividendo en menos pasos.

La operatoria aditiva y la multiplicación por un entero con fracciones y decimales se inicia en 4º año/grado ligada a los contextos que le dan sentido. La misma avanza en 5º y 6º años/grados, tanto con las expresiones fraccionarias como con las decimales, con la intención de elaborar y comparar procedimientos de cálculo para llegar a sistematizarlos.

Al hablar de **tratamiento de la información** en relación con los contenidos del Eje “Número y Operaciones”, nos referimos a un trabajo específico que permita a los alumnos desplegar en forma progresiva ciertas capacidades, como interpretar la información que se presenta en diferentes portadores (enunciados, gráficos, tablas, etc.), seleccionar y organizar la información necesaria para responder preguntas, diferenciar datos de incógnitas, clasificar los datos, planificar una estrategia de resolución, anticipar resultados.

La lectura y organización de la información, así como su eventual recolección a partir de experiencias significativas para los alumnos, se iniciará en 4º año/grado y avanzará en el Ciclo en las formas de representación en gráficos, finalizando en 6º año/grado con problemas que requieran tomar decisiones entre distintas alternativas de organización y presentación de datos.

En el Eje “Geometría y Medida” incluimos el estudio del **espacio**. Las referencias espaciales construidas en el Primer Ciclo se articulan progresivamente en un sistema que permite ubicar los objetos en el espacio sensible, y en la representación de ese espacio en el plano. En este Ciclo se avanza en el tamaño del espacio que se representa y en las referencias que se usen, comenzando por la elección de referencias por parte del alumno en 4º año/grado, y evolucionando hacia la inclusión de representaciones convencionales en función de un sistema de referencia dado, en 6º año/grado.

En paralelo con el estudio del espacio, se estudian los objetos **geométricos,** es decir las formas de dos y tres dimensiones. Para ello, es posible trabajar con las **figuras** y los **cuerpos** sin relacionarlos necesariamente con objetos del mundo sensible.

El avance de los conocimientos geométricos, en este Ciclo, no se plantea en relación con el repertorio de figuras y cuerpos, sino en función de las propiedades que se incluyan. Se inicia en 4° año/grado la consideración de bordes rectos o curvos, número de lados y de vértices, ángulos rectos o no para las figuras, y de las superficies curvas o planas, número y forma de las caras para el caso de los cuerpos. Para las figuras se avanza incluyendo el paralelismo de los lados y las propiedades de las diagonales. Se evolucionará también en el tipo de argumentaciones que se acepten como válidas –desde las empíricas hacia otras basadas en propiedades–, lo que irá en paralelo con la conceptualización de las figuras como objetos geométricos y con el uso de un vocabulario cada vez más preciso.

Los problemas del Eje “Geometría y Medida” en el Segundo Ciclo en principio funcionan como articuladores entre la Aritmética y la Geometría, en el sentido que permiten atribuir sentido a los números racionales y cuantificar ciertos atributos de los objetos y de las formas. Los problemas reales de medición efectiva de longitudes, capacidades, pesos y tiempo que se incluyan en cada año deben permitir al alumno elaborar una apreciación de los diferentes órdenes de cada magnitud y utilizar instrumentos para establecer diferentes medidas.

En este Ciclo se hace necesario, además, un trabajo profundo en relación con los cambios de unidades. En 4° año/grado habrá que establecer, a propósito de diferentes magnitudes, qué relación existe entre las unidades elegidas y las medidas correspondientes. Luego, se hace necesario avanzar en la comprensión de la organización decimal de los sistemas de unidades del SIMELA, lo que constituye un soporte interesante para la comprensión de la escritura decimal de los racionales. En 6° año/grado habrá que explicitar las relaciones de proporcionalidad involucradas en la expresión de una misma cantidad con distintas unidades.

Articular el trabajo en la clase de 5° año/grado

Al organizar unidades de trabajo, es necesario tener en cuenta, además de las decisiones didácticas que tome el docente, las vinculaciones matemáticas entre las nociones que se enseñan y que tienen que ver con su origen y, por lo tanto, con las características que le son propias.

El trabajo con los contenidos vinculados a “Número” y los vinculados a “Operaciones” supone, tanto para los naturales como para las fracciones y decimales, considerar relaciones de distinto tipo. El trabajo sobre numeración se relaciona con el de cálculo, dado que los métodos de cálculo, redondeo, aproximación y encuadramiento están ligados a la estructura del sistema de numeración decimal. Por su parte, las diferentes estrategias de cálculo exacto y aproximado dependen del significado que se les da a las operaciones en los distintos contextos.

En relación con los contenidos vinculados a “Geometría” y los vinculados a Medida, es necesario considerar que el estudio de las propiedades de las figuras y los cuerpos incluye nociones de medida, por ejemplo, las longitudes de los segmentos o las amplitudes de los ángulos.

A su vez, los contenidos de “Medida” se relacionan con los de “Número y Operaciones”, ya que la noción de número racional, entendida como cociente entre enteros, surge en el contexto de la medición de cantidades. Por lo tanto, habrá que avanzar simultáneamente con la comprensión de los usos de los números racionales y del proceso de medir.

En relación con las decisiones didácticas, solo señalaremos en este apartado que los contenidos de tratamiento de la información son transversales a todas las unidades de trabajo. Presentar la información de diferentes modos en los problemas y variar la tarea, tanto en los problemas aritméticos como geométricos, dará lugar a que los alumnos no conciban la idea de problema de una manera estereotipada, tanto en lo que se refiere a la forma de los enunciados como a las formas de resolución y el número de soluciones a investigar.

nap

El reconocimiento y uso de los números naturales y de la organización del sistema decimal de numeración, y la explicitación de sus características en situaciones problemáticas.

El reconocimiento y uso de fracciones y expresiones decimales, en situaciones problemáticas.

El reconocimiento y uso de las operaciones entre números naturales y la explicitación de sus propiedades, en situaciones problemáticas.

El reconocimiento y uso de las operaciones entre fracciones y expresiones decimales en situaciones problemáticas.

Número y Operaciones

Número y Operaciones

Los saberes que se ponen en juego

Para que los alumnos puedan aprender los saberes incluidos en los núcleos, en la escuela tendremos que proponer situaciones de enseñanza en las que se pongan en juego distintos aspectos de los mismos. Se trata de que los conocimientos matemáticos se introduzcan en el aula asociados con los distintos problemas que permiten resolver para, luego, identificarlos y sistematizarlos.

- Interpretar, registrar, comunicar y comparar escrituras equivalentes para un mismo número.
- Argumentar sobre la equivalencia de distintas descomposiciones de un número (aditivas, multiplicativas) usando unidades de distintos órdenes.
- Interpretar, registrar, comunicar y comparar cantidades (precios, longitudes, pesos, capacidades, áreas) usando fracciones y/o expresiones decimales usuales, ampliando el repertorio para establecer nuevas relaciones.
- Interpretar la equivalencia entre expresiones fraccionarias y decimales[1] para una misma cantidad.
- Comparar fracciones y/o expresiones decimales entre sí y con el entero a través de distintos procedimientos (relaciones numéricas, expresiones equivalentes, representaciones gráficas) ampliando el repertorio para establecer nuevas relaciones.
- Sumar, restar, multiplicar y/o dividir números naturales con distintos significados partiendo de información presentada en textos, tablas y gráficos estadísticos, analizando el tipo de cálculo requerido –exacto, aproximado, mental, escrito, con calculadora– y evaluando la razonabilidad del resultado obtenido.

[1] Se incluye la comparación entre fracciones, entre expresiones decimales y entre fracciones y expresiones decimales, atendiendo a las equivalencias de uso frecuente (1/4 = 0,25; 3/4 = 0,75) y ampliando el repertorio para establecer nuevas relaciones.

- Analizar relaciones entre cantidades para determinar y describir regularidades, incluyendo el caso de la proporcionalidad.
- Elaborar y comparar distintos procedimientos (multiplicar, dividir, sumar o restar cantidades correspondientes expresadas con números naturales) para calcular valores que se corresponden proporcionalmente evaluando la pertinencia del procedimiento en relación con los datos disponibles.
- Elaborar y comparar procedimientos de cálculo con números naturales –exacto y aproximado, mental, escrito y con calculadora– de sumas, restas, multiplicaciones y divisiones por una cifra o más, analizando su pertinencia y economía en función de los números involucrados.
- Argumentar sobre la validez de un procedimiento o el resultado de un cálculo, usando relaciones entre números naturales y propiedades de las operaciones.
- Explicitar relaciones numéricas vinculadas con la división y la multiplicación (múltiplo, divisor, D = d x c + r).
- Elaborar preguntas a partir de diferentes informaciones, registrar y organizar información en tablas y gráficos.
- Sumar, restar, multiplicar y dividir cantidades expresadas con fracciones o decimales, utilizando distintos procedimientos y representaciones, y evaluando la razonabilidad del resultado obtenido.
- Elaborar y comparar distintos procedimientos (multiplicar, dividir, sumar o restar cantidades correspondientes expresadas con fracciones o decimales) para calcular valores que se corresponden proporcionalmente, evaluando la pertinencia del procedimiento en relación con los datos disponibles.
- Elaborar y comparar procedimientos[2] de cálculo –exacto y aproximado, mental, escrito y con calculadora– de sumas, restas, multiplicaciones y divisiones entre fracciones y entre expresiones decimales, incluyendo el encuadramiento de los resultados entre naturales y analizando la pertinencia y economía del procedimiento en relación con los números involucrados.
- Explicitar procedimientos de cálculo mental que puedan utilizarse para facilitar otros cálculos (la mitad de la mitad es la cuarta parte, 0,25 x 3 = 0,75 = 3/4,...) y para argumentar sobre la validez de los resultados obtenidos.

[2] Se incluye la comparación de procedimientos elaborados por los alumnos y de estos con los propuestos por el docente (estimaciones, representaciones gráficas, uso de descomposiciones aditivas y equivalencias numéricas).

Propuestas para la enseñanza

En este apartado, intentamos precisar el alcance y el sentido de los conocimientos que se priorizan en el Eje "Número y Operaciones", a partir de algunos ejemplos de actividades para desarrollar en el aula y de producciones de los niños. Además, presentamos posibles secuencias de actividades que apuntan al aprendizaje de una noción y muestran el tipo de trabajo matemático propuesto desde el enfoque explicitado al inicio de este *Cuaderno*, en "Enseñar Matemática en el Segundo Ciclo".[3]

Para avanzar en el conocimiento del sistema de numeración

En los *Cuadernos* de años anteriores, venimos proponiendo la enseñanza del sistema de numeración decimal a partir del análisis de las regularidades en la escritura y lectura de números, y avanzando hacia la idea de sucesivos agrupamientos de a 10.

Durante el Primer Ciclo, los alumnos han trabajado con números naturales, enfrentando una gran variedad de situaciones que les permitieron usar y conocer el sistema de numeración[4] y, en 4º año/grado, han argumentado sobre las posibles descomposiciones de un número. En 5º año/grado, el trabajo que planteamos avanza en dos sentidos. Por una parte, en la explicitación de las características del sistema para los números naturales tal como lo desarrollamos en este apartado y, por otra, en el uso de esta representación para escribir cantidades no enteras, lo que se plantea en el apartado "Plantear situaciones para medir, repartir o partir usando fracciones y/o expresiones decimales".

Así, en el campo de los números naturales, es necesario que los niños avancen en:

- la sistematización de las características de nuestro sistema de numeración: *las cifras del número tienen un valor diferente según el lugar que ocupen en él* (es posicional), *de derecha a izquierda cada posición vale diez veces más que la anterior* (es decimal), *cuando el número tiene 0 en una posición, significa que no tiene unidades sueltas de ese orden;*

---

3 **Recomendación de lectura:** en reiteradas ocasiones se propondrán actividades a partir de lo que se ha realizado durante el año/grado anterior. En los casos en que los chicos no hayan realizado dicho trabajo u otro similar, es conveniente consultar *Cuadernos para el aula: Matemática 4* para que, en función de los conocimientos del grupo, el docente decida cómo adaptar la propuesta que allí se incluye.

4 **Recomendación de lectura:** véase el apartado "Plantear situaciones para componer y descomponer números", en el Eje "Número y Operaciones" de *Cuadernos para el aula: Matemática 3* y de *Cuadernos para el aula: Matemática 4*, respectivamente.

- la posibilidad de argumentar sobre equivalencias entre distintos órdenes: *10.000 unidades forman 1000 decenas, porque 10.000 es 1000 x 10, y 10 unidades forman 1 decena;*
- el establecimiento de vínculos entre dos descomposiciones de un número, esto es, una aditiva, donde cada sumando expresa el valor de cada cifra en unidades (20.234 = 20.000 + 200 + 30 + 4) y otra multiplicativa, en la que cada sumando expresa el valor de cada cifra con una multiplicación, la del valor absoluto de la cifra por la unidad seguida de tantos ceros como corresponda (20.234 = 2 x 10.000 + 2 x 100 + 3 x 10 + 4 x 1).

Para promover la interpretación, el registro y la comunicación de cantidades, convendrá que para los problemas se elijan contextos extramatemáticos[5] que pueden o no estar asociados con proyectos de otras áreas, y que deberán ser apropiados para que los números "grandes" tengan sentido. Por ejemplo, al interpretar u organizar información en tablas y gráficos podemos considerar la cantidad de habitantes de una población, de asistentes a una marcha o los datos vinculados con la producción de cereales, con la explotación de recursos minerales, etc. En estos casos, se producirá la lectura, escritura e interpretación de los números involucrados en las cantidades del problema.

También es necesario que, con los mismos propósitos, presentemos problemas de contexto intramatemático, es decir aquellos en los cuales se trabaja con números y no con cantidades.

En este apartado, presentamos, en primer lugar, situaciones de ambos tipos de contexto, en las que los alumnos tendrán que identificar números a partir de un conjunto de condiciones referidas a su representación y a su comparación con otros números. Otras situaciones que se proponen dan lugar a la elaboración de explicaciones sobre las características del sistema y las equivalencias, partiendo de su descomposición aditiva y/o multiplicativa.

[5] **Recomendación de lectura:** véase el apartado "Los contextos", en "Enseñar Matemática en el Segundo Ciclo" de este *Cuaderno*.

Es importante destacar que la complejidad de las actividades no depende solamente de la cantidad de cifras de los números, sino del tipo de tarea que involucra su uso. En este sentido, la explicitación de conocimientos requeridos en las tareas de elaboración de formulaciones y argumentaciones implica una nueva reflexión sobre las relaciones establecidas cuando se resolvieron los problemas.

Con respecto a la forma en que los chicos adquieren conocimientos matemáticos, y en particular conocimientos numéricos, cabe aclarar que, durante muchos años, las derivaciones de investigaciones psicológicas que circularon en las escuelas han instalado la idea de que el uso de material concreto asegura una mejor comprensión de las nociones que se quieren enseñar. Tales ideas relativas a la construcción de conocimientos se apoyaban en la necesidad de generar interacciones de los niños con el medio a partir de alguna pregunta para luego reflexionar sobre sus acciones, y en tal sentido es importante señalar que la adquisición de conocimientos está ligada a las relaciones que se establecen en esas ocasiones. Hoy sostenemos la necesidad de tales interacciones y destacamos que estas no debieran apoyarse únicamente en la manipulación de materiales concretos sino también en el trabajo sobre las representaciones de los números, priorizando las reflexiones sobre las acciones realizadas en todos los casos[6].

Es esperable que, al ir resolviendo las actividades, las nociones vinculadas con las características del sistema (posición o lugar, decimal o de a 10) aparezcan en las formulaciones orales o escritas y en las argumentaciones de los chicos, y que los chicos vayan descubriendo que el lenguaje propio del área es un medio idóneo para expresar las ideas con claridad.

Plantear situaciones para comparar cantidades y números

Los problemas donde hay que establecer comparaciones entre cantidades o números dan la ocasión de interpretarlos y, eventualmente, hacer registros o comunicarlos a otros.

En 5º año/grado es posible retomar, si los chicos no lo hubieran trabajado en el año anterior, los juegos de encuadramiento de números propuestos en *Cuadernos para el aula: Matemática 4*; allí los niños debían descubrir un número a partir de indi-

[6] **Recomendación de lectura:** para profundizar sobre el uso de materiales didácticos en relación con la enseñanza del sistema de numeración en el Primer Ciclo, se puede consultar *Pensando en la enseñanza, Preguntas y respuestas*, Buenos Aires, Secretaría de Educación de la MCBA.

cios sobre su ubicación con respecto a otros (está entre…, es mayor que…). Esto implica el uso de estrategias de comparación de números y el establecimiento de las relaciones de orden, lo que podría hacerse en 5º con números de 5 o 6 cifras.

También se puede proponer la siguiente actividad, donde además de **comparar números**, hay que identificar un número por la conjunción de varias características, algunas tienen que ver con el uso de términos que denominan las posiciones de las cifras y otras, con el uso de las relaciones de mayor y menor.

Es interesante destacar que los conocimientos que se ponen en juego en la actividad se refieren a cuestiones diferentes: el conocimiento del valor posicional es relativo al sistema de representación decimal; en cambio, las relaciones de mayor o menor entre números se dan de manera independiente del sistema de representación. Así se puede pensar en la relación de mayor entre un par de números escritos en diferentes sistemas: 20 > 14, y también XX > XIV. Sin embargo, una vez elegido el sistema, es posible elaborar reglas de reconocimiento ligadas al mismo para ordenar los números, como *el mayor es el que tiene más cifras o el que manda es el de la izquierda*, para el sistema posicional decimal.

"Juego de las pistas": comparar números e identificar las posiciones de sus cifras.
Materiales: tarjetas con pistas.
Organización de la clase: se divide la clase en equipos de 4 alumnos.
Desarrollo: se trata de una competencia entre varios equipos, cada uno de los cuales recibe dos tarjetas, cada una con un conjunto de condiciones que debe cumplir un número. En una hoja, el equipo escribe los números que cumplen las condiciones explicadas en cada una de las dos tarjetas.

Es conveniente que el maestro conozca de antemano todas las respuestas (los números que cumplen las condiciones) para dar a cada equipo una tarjeta con condiciones que cumple un único número (por ejemplo, las tarjetas 2, 4, 6 y 7) y otra con condiciones que cumplen varios números (por ejemplo, las tarjetas 1, 3, 5 y 8).

La asignación de puntajes se realiza con los siguientes criterios: cuando la respuesta es un único número, obtienen 1000 puntos, si aciertan, y, si no, suman 200 puntos por cada dígito correctamente ubicado. Cuando hay más de un número como solución, obtienen 500 puntos por cada número correcto y 500 adicionales por escribir todas las respuestas posibles.

1

- Está entre **10.000** y **20.000**.
- Tiene exactamente **132** centenas.
- La cifra de las decenas es un número mayor que **3** y menor que **7**.

2

- La cifra de las unidades coincide con la de las decenas.
- Tiene exactamente **11** centenas.
- La cifra de las decenas supera en dos a la de las centenas.
- Todas sus cifras son impares.

3

- Tiene más de **98** centenas.
- Tiene cuatro cifras.
- Al agregarle **5** decenas, pasa a tener **5** cifras.
- La cifra de las unidades es **0**.

4

- Tiene una docena de decenas.
- Sus cifras forman una serie ordenada.
- Tiene tres cifras.

5

- Está entre **10.000** y **30.000**.
- Tiene una decena de unidades de mil.
- Agregándole **5** centenas, aumenta una unidad de mil.
- Termina en doble cero.

6

- La cifra de las unidades triplica a la de las unidades de mil.
- Tiene cuatro cifras.
- Tiene **300** decenas.
- Tiene dos ceros intermedios.

7

- No es mayor que media decena de mil.
- Las cifras de las unidades, decenas y centenas son **0**.
- Comienza en un dígito par, mayor que **3**.
- La suma de sus cifras es **4**.

8

- Está entre **4000** y **5000** unidades.
- Tiene **47** centenas.
- La cifra de las unidades es igual a la diferencia entre la cifra de las centenas y la de las unidades de mil.
- La cifra de las decenas es menor que la de las unidades.

En la puesta en común, nuestras intervenciones apuntarán a que los niños expliquen cómo lo pensaron, lo que nos permitirá conocer el estado de sus conocimientos sobre las nociones utilizadas, así como la interpretación que hacen de términos como: cifra, decena, centena, ceros intermedios, etc. En consecuencia, será necesario compartir el significado de estas expresiones.

En algunas tarjetas, la respuesta tiene varias soluciones; esto resulta interesante para que los chicos no asocien la idea de respuesta a la de solución única. Una tarea posterior atractiva para estos casos es proponer a los chicos agregar una condición para reducir o para ampliar la cantidad de soluciones, incorporando así un trabajo sobre el tratamiento de la información.[7]

A partir de esta actividad, es posible proponer a los alumnos que escriban nuevas tarjetas con pistas, para que luego respondan sus compañeros. En este caso, según nuestra intencionalidad, daremos el número que van a utilizar o bien lo dejaremos librado a los propios alumnos. Además, en la escritura de pistas, podremos imponer el uso de determinadas palabras. Si decidiéramos darle a cada grupo un número para que inventen las pistas, podríamos, sin que ellos lo sepan, darles el mismo a todos los grupos. En estos casos, en la puesta en común de lo producido, será posible comparar pistas, encontrar distintas formas de enunciar una misma condición, o bien un conjunto distinto de condiciones para identificar el mismo número. También podríamos dar a cada grupo números con alguna semejanza, como por ejemplo: 100.002, 10.002, 1002, 102. En este caso, se podrá preguntar en la puesta en común sobre qué condición cumplen todos y obtener respuestas como *Todos están formados por las mismas cifras, Tienen ceros intermedios, La cifra de mayor valor absoluto supera en dos a la de menor valor,* entre otras.

Si estas actividades la planteamos al inicio del trabajo con número naturales, nos permitirá conocer el grado de comprensión de la relación de orden, el manejo de nociones ligadas al valor posicional y el lenguaje disponible para la redacción de las consignas.

[7] **Recomendación de lectura:** véase el apartado “Las relaciones entre preguntas y datos” en “Enseñar Matemática en el Segundo Ciclo” de este *Cuaderno*.

Si cada equipo consiguiera armar dos o tres tarjetas, se podría intercambiar con los compañeros de un grado paralelo de la misma u otra escuela. Esto puede constituirse, entonces, en una oportunidad interesante para articular acciones entre el equipo docente de una institución a partir de la circulación de los saberes entre pares. Asimismo, es posible hacer una adaptación para grupos de niños con distintos conocimientos en un plurigrado.

Otros desafíos numéricos que involucran la noción de valor posicional son los siguientes:

1. ¿Cuál es el mayor número de 4 cifras que se puede obtener a partir de 5679, cambiando de lugar una sola cifra? ¿Y cambiando de lugar dos? ¿Por qué?
2. ¿Cuántos números de 3 cifras podés formar con los dígitos 1, 2, 3 y 4 poniendo siempre el 1 en el lugar de las centenas, sin repetir ninguno?
3. ¿Cuántos números de 3 cifras podés formar con los dígitos 1, 2 y 0, poniendo siempre el 1 en el lugar de las decenas?

Aquí interesa tanto recuperar las nociones que se vienen trabajando como avanzar en la búsqueda de las combinaciones de cifras que respetan las condiciones pedidas, mostrando estrategias que permitan asegurar que se han considerado todas.

En cuanto a la **comparación de cantidades**, por ejemplo, 2350 m con 2 km o 375 cl con 3 l, es posible presentar actividades que incluyan la lectura y escritura de dichas cantidades, como se menciona en el apartado "Para trabajar con la información" de este *Cuaderno*. Allí, se propone construir o interpretar tablas o pictogramas. Estas representaciones podrían tomarse de textos de Ciencias Sociales o de Ciencias Naturales que se estén trabajando en esas áreas. Por ejemplo, los datos podrían referirse a recursos naturales de la Argentina o a problemas ambientales y la tarea podría ser interpretar la información contenida en tablas o encuadrar un valor al indicar a qué categoría corresponde.

Plantear situaciones para analizar distintas escrituras de un número

En el Primer Ciclo, se favoreció el uso implícito de las reglas del sistema de numeración mientras que en el Segundo Ciclo es fundamental su explicitación para avanzar en la reflexión sobre las mismas. Para ello, es necesario apoyarse en la expresión de un número con diferentes descomposiciones: la aditiva, donde se explicita el valor posicional de cada cifra (345 = 300 + 40 + 5), y la multiplicativa, donde se explicitan los órdenes de agrupación (345 = 3 x 100 + 4 x 10 + 5, o 345 como 3 grupos de 10 grupos de 10, 4 grupos de 10 y 5 sin agrupar).

Si damos la oportunidad de trabajar con formas diferentes de **escribir un mismo número**, haremos posible que los alumnos avancen en el uso de variadas estrategias de cálculo en función de los números involucrados y de lo que la situación pida, así como también en las posibilidades de comprender los distintos pasos de los algoritmos de cada operación.

Por otro lado, tener claras las características del sistema decimal como forma de representación de los números naturales contribuye a avanzar hacia el análisis de lo que cambia y lo que permanece igual cuando se comienza a trabajar con el nuevo campo numérico, el de los racionales. Estos números admiten, en principio, una representación fraccionaria, con reglas muy diferentes de las usadas para representar números naturales y un nuevo símbolo, la raya de fracción. También tienen una representación decimal, con el mismo sistema de agrupamientos de a 10 que se usa para los naturales, pero que obliga a revisar si algunas ideas que se usaban con los naturales siguen siendo válidas. Por ejemplo, con los decimales, el de más cifras no es necesariamente el más grande[8].

Nuevamente, los problemas intramatemáticos resultan un contexto interesante para que los chicos escriban números y analicen escrituras, poniendo en juego argumentaciones acerca de las descomposiciones numéricas. El juego[9] que planteamos a continuación incluye el uso de la calculadora como material auxiliar, como una herramienta que permite en este caso que un compañero controle el uso de estrategias de cálculo mental que hace otro compañero.

"Multiplico y sumo": calcular productos y adiciones con potencias de diez.
Materiales: un juego de tarjetas como las siguientes:

+ 10	+ 100	+ 1000	x 10	x 100	x 1000

[8] **Recomendación de lectura:** véase "Para avanzar en el conocimiento de fracciones y decimales" en el apartado del Eje "Número y Operaciones" de este *Cuaderno*.

[9] **Recomendación de lectura:** en el apartado "Los contextos" en "Enseñar Matemática en el Segundo Ciclo" de este *Cuaderno*, se analiza cómo abordar los juegos como situaciones de aprendizaje.

Cada dos niños, una calculadora y una tablita de cuatro columnas, donde van anotando el número inicial, las operaciones a efectuar que aparecen en la tarjeta y el resultado.

Número	x....	+.....	Resultado
34	x 10	+ 100	440

Piedritas, fichas o tapitas para anotar el puntaje.
Organización de la clase: se juega de a dos.
Desarrollo: se colocan las tarjetas con el signo de suma en una pila y las tarjetas con el signo de multiplicación en la otra pila, todas boca abajo. Uno de los niños dice un número de dos cifras. El otro saca una tarjeta de cada pila y deberá, mentalmente, primero multiplicar el número que dijo su compañero por el número que indica la tarjeta con el signo x, y luego sumarle el número que indica la tarjeta con el signo +. Por último, deberá anotar todo en la tabla. El primero controla la exactitud del resultado, con la calculadora. Si es correcto, le da una tapita. Luego, invierten los roles. Gana el que junta más tapitas.

El docente podrá limitar la duración del juego hasta que cada pareja realice 10 jugadas, con lo que cada pareja de chicos obtendrá una tabla de 10 números. A partir de esas listas, se puede proponer una segunda actividad para discutir:

1. ¿Qué transformación se produce en un número como el 34 al multiplicarlo por 10?, ¿y por 100?, ¿y por 1000? ¿Por qué?
2. ¿Qué transformación se produce en un número como el 34 al sumarle 10?, ¿y al sumarle 100?, ¿y 1000? ¿Por qué?
3. Si me dicen 34, ¿daría el mismo resultado multiplicar primero por 100 y después sumar 100, que sumar primero 100 y después multiplicar por 100? ¿Por qué?
4. Si quiero obtener el número más grande posible, ¿qué conviene hacer primero, sumar 100 o multiplicar 100? ¿Por qué?

En la puesta en común se espera que, para la pregunta 1, los chicos expliquen que *al multiplicar por 10 un número de dos cifras, cada unidad se transforma en 10, es decir en una decena; cada decena se transforma en 10 decenas, o sea en una centena. Si se multiplica por 100, cada unidad se transforma en 100, es decir en una centena y cada decena en 100 decenas, o sea en una unidad de mil. Y lo mismo ocurre al multiplicar por 1000.* También podrían pensar en la descomposición multiplicativa del número y ver qué pasa al multiplicar. Por ejemplo, el número 34 = 3 x 10 + 4 al ser multiplicado por 10, queda así: 34 x 10 = 3 x 10 x 10 + 4 x 10 = 300 + 40 = 340.

La pregunta 2 se puede pensar a partir de la descomposición aditiva $34 = 30 + 4$, y ver que al sumar 10, queda $34 + 10 = 30 + 10 + 4 = 40 + 4 = 44$. También se puede pensar que *se agrega 1 al lugar de los dieces.*

Con respecto a la pregunta 3, se podrá pensar en la siguiente diferencia. Al hacer 34 x 100 + 100, se hace 34 veces el 100 y se agrega una vez más 100, en tanto que al hacer 34 + 100 x 100 en el orden en que aparecen, se tiene que hacer 100 veces la suma 34 + 100.

La última pregunta puede pensarse discutiendo que, en el segundo caso, multiplicar por 100 afecta tanto a 34 como a 100 (es 34 x 100 + 100 x 100); mientras que, en el primer caso, multiplicar 100 afecta sólo a 34 (es 34 x 100 + 100) y agregar 100 no compensa.

También sería posible en la puesta en común que aprovechemos la ocasión para discutir el modo de indicar en un cálculo con dos operaciones qué operación se hace primero, es decir el uso del paréntesis, y/o explicitar el uso de propiedades de la suma y de la multiplicación (asociativa, conmutativa, distributiva).[10]

Para seguir trabajando estos conocimientos en el cuaderno, pueden presentarse nuevas situaciones para resolver en forma individual. En estas situaciones, también aparece el uso de la calculadora[11], pero con una función diferente.

1. En el visor de la calculadora de Ale, estaba el número 3627, él dice que hizo una sola cuenta y logró que en el lugar del 6 apareciera un 4 sin que se modificara el resto de los números. ¿Es posible? Explicá por qué.
2. Después Ale dice que cuando está escrito el número 3627 en el visor de la calculadora, él logra, también con una sola cuenta, que en el lugar del 2 aparezca un 0 y en lugar del 7, un 4. ¿Es posible? Explicá por qué.
3. Finalmente, Ale dice que con una sola cuenta logra que en lugar del 3 aparezca un 8 en el visor de la calculadora, sin que se modifique el resto de las cifras. ¿Es posible?

En esta actividad se promueve la anticipación de resultados, para lo cual los alumnos deben realizar cálculos mentales. Aquí, al escribir el número en la calculadora, el jugador ya tuvo que haber tomado la decisión acerca de qué número va a utilizar. Las máquinas funcionan como elementos autocorrectores. Si no se cuenta con calculadoras suficientes para jugar con todos los niños, se podrá utilizar, para cada pareja, una tabla escrita sobre un papel, en la que cada jugador podrá escribir el número que resulta de cada uno de los cálculos mentales que va realizando, y el control se deberá realizar por medio del cálculo escrito.

[10] **Recomendación de lectura:** véase el apartado “La gestión de la clase” en “Enseñar Matemática en el Segundo Ciclo” de este *Cuaderno.*

[11] **Recomendación de lectura:** Broitman, C., Itzcovich, H. (2001), *Matemática. Aportes didácticos para el trabajo con la calculadora en los tres ciclos de la EGB.* Documento Nº 6, DGCyE, provincia de Buenos Aires.

También podremos recurrir a situaciones que den continuidad a las planteadas desde el Primer Ciclo en relación con el contexto del dinero, pero ya no con los billetes, sino de la mano de otros portadores de información numérica. Por ejemplo, en las siguientes actividades, además de interpretar la información numérica, los chicos deberán comprender los textos. Presentamos una tarea diferente a las propuestas habitualmente, un diálogo para completar:

• Completá el diálogo:
Doña Clara: *–Necesito cobrar este cheque de 5000 pesos, por favor, déme 20 billetes de 10 y el resto de 100.*
Cajero: *–Bien, aquí tiene: son 20 billetes de 10 y ……. billetes de 100.*
Doña Clara: *–Disculpe, mejor déme 500 pesos en billetes de 10 y el resto, en billetes de 100.*
Cajero: *–A ver, serían ……… billetes de 10 y ……… billetes de 100.*
Doña Clara: *–Perdone, pero mejor llevo menos billetes, déme todo en billetes de 100.*
Cajero: *–Bien, aquí tiene: son ……… billetes de 100.*

Este problema permite pensar en las equivalencias entre distintos órdenes. Así, los 5000 son 5 unidades de mil, que habrá que componer con decenas y centenas de diferentes maneras según los pedidos de Doña Clara.

Para avanzar en el conocimiento de fracciones y decimales

Ya hemos afirmado que el conocimiento de una determinada noción matemática requiere, en principio, identificar las situaciones en las que es posible, o no, utilizarla. Nos ocuparemos, entonces, de considerar distintos usos que se les puede dar a estos nuevos números, planteando situaciones que los naturales no permiten resolver.

Posteriormente, trataremos el establecimiento de relaciones entre fracciones y el entero, entre decimales y el entero; entre fracciones y decimales entre sí, etc., ya que la consideración de estas relaciones y de las distintas escrituras posibles es parte fundamental de la construcción de este conocimiento. Este trabajo se inicia con la recuperación de ciertas relaciones que los niños y niñas ya pueden tener acerca de las fracciones o decimales más usuales:

Un cuarto es la mitad de medio kilo, con 4 cuartos formo 1 kilo, con 2 monedas de 50 centavos completo $ 1, para escribir 25 centavos se puede usar un número con coma, como 0,25, para luego avanzar hacia su explicitación y generalización.

En *Cuadernos para el aula: Matemática 4*, iniciamos la presentación de propuestas de trabajo con expresiones fraccionarias y decimales de los números racionales asociadas a contextos de uso social habitual que permitieron que los alumnos formularan relaciones y reglas de uso en esos contextos. En 5° año/grado, habría que ampliar los contextos de uso, puesto que los alumnos ya estarían en condiciones de tomar como objeto de estudio las relaciones que establecen, por ejemplo, algunos criterios de comparación de números, para determinar cuándo funcionan y cuándo no. Más adelante, se avanzará en extender y generalizar esas relaciones y dar razones sobre su funcionamiento. En este sentido, *"Formular leyes para comparar números, establecer la verdad o la falsedad de enunciados, analizar la equivalencia de expresiones numéricas sin apelar al cálculo efectivo, comparar diferentes procedimientos realizados por* otros, *delimitar el alcance de diferentes propiedades (esta* regla *vale en tales casos) son tareas que, al ubicar al alumno en un plano de reflexión sobre el trabajo llevado a cabo, le permiten comprender aspectos de la organización teórica de la disciplina, le posibilitan acceder a las razones por las cuales algo funciona de una cierta manera. Lograr que los alumnos adquieran cierto nivel de fundamentación para los conceptos y propiedades con los que tratan, es un propósito de la educación matemática que la escuela tiene que brindar*[12]*.*

Otro aspecto importante en el camino de avance en el reconocimiento y uso de estos números lo constituye la consideración del conjunto o familia con los cuales trabajar en este año/grado y con las nuevas relaciones que deseamos introducir. En este sentido, una propuesta podría ser la ampliación del repertorio de fracciones. Es el caso de la familia de los cuartos, los medios y los octavos hacia otras fracciones que continúen con la idea de seguir pensando en la "mitad de" (1/16, 1/32), incluyendo también los quintos, los décimos, los centésimos y los milésimos; introduciendo el noveno, los doceavos y los dieciochoavos en la "familia" de los tercios; incluyendo fracciones mayores que la unidad, como $2\,{}^{3}/_{12}$, 7/2, 12/9 y otras relaciones, como "es 1/3 y medio", "es 1/2 y 1/9", etc. y todas las otras familias que se derivan del trabajo con comparaciones, que explicitaremos más adelante.

En relación con el trabajo con decimales, proponemos continuar con la comprensión de estos números y sus características particulares, apuntando a una mayor sistematización respecto de la conexión entre decimales y fracciones. Para esto, se recupera el contexto del dinero ya propuesto para 4° año/grado y se incluyen otros, como los de medida de longitud, de capacidad, etcétera.

Es importante destacar que este trabajo apunta a que los alumnos comiencen a considerar que se trata de "nuevos números", distintos de los números naturales, que hay que explorar para conocer y caracterizar.

---

[12] Extraído del documento *Matemática. Fracciones y números decimales. Apuntes para la enseñanza* (2005), Gobierno de la Ciudad de Buenos Aires, Secretaría de Educación, Dirección General de Planeamiento, Dirección de Currícula.

Plantear situaciones para medir, repartir o partir usando fracciones y/o expresiones decimales

En 4° año/grado, los problemas ligados a las mediciones o al uso del sistema monetario, y distintas situaciones de reparto y partición permitieron establecer las primeras conclusiones sobre las características de estos números, trabajando sobre un repertorio de números bastante acotado. El avance que proponemos para 5º año/grado consiste en presentar situaciones similares para articular con el trabajo precedente, pero que al mismo tiempo permitan tanto la ampliación del repertorio como el establecimiento de nuevas relaciones entre fracciones, entre expresiones decimales y la posibilidad de avanzar en la articulación de estas escrituras.

En relación con las **fracciones**, en el año/grado anterior propusimos el trabajo con familias de fracciones como las siguientes: 1/2, 1/4, 1/8 (mitad, mitad de la mitad y mitad de la mitad de la mitad); 1/3, 1/6 (tercera parte y mitad de la tercera parte); 1/5, 1/10 (quinta parte y mitad de la quinta parte). En 5º año/grado proponemos continuar con estas, pero ampliando de la siguiente manera: 1/2, 1/4, 1/8, 1/16; 1/3, 1/6, 1/9; 1/5, 1/10, 1/100. Respecto de las relaciones entre las fracciones, trabajaremos la mitad, la tercera parte y la décima parte de cualquier fracción.

Las situaciones de partición en las que se trata de averiguar la cantidad de partes en las que se subdividió el total, una vez fijado el valor de cada parte, seguramente se han abordado al resolver problemas como: *Un apicultor cosechó 5 kg de miel y para la venta necesita fraccionarlos en frascos de 3/4 kg. ¿Cuántos frascos deberá utilizar?*

Un avance en relación con este planteo puede ser presentar varias preguntas que requieran considerar nuevas fracciones y expresiones decimales.

- Un apicultor obtuvo 35 kg de miel de una colmena. Para su venta, decide analizar la conveniencia de usar distintos envases. ¿Cuántos necesitaría si usa: envases de $\frac{3}{4}$ kg, de $\frac{1}{2}$ kg, de $\frac{35}{100}$ de kg, de $\frac{1}{4}$ kg o de 0,2 kg?

En este caso, resulta interesante discutir con los alumnos si, frente a la variedad de cálculos, es conveniente realizar algunos antes que otros para apoyarse en los resultados obtenidos, lo que daría lugar a la explicitación de relaciones entre fracciones o entre fracciones y expresiones decimales.

En otros problemas, las cantidades expresadas con fracciones y decimales surgen como resultado de una medición. En particular, en 5° año/grado podemos proponer a los alumnos actividades que involucran mediciones de longitudes y de áreas, en las que la cantidad elegida como unidad no está contenida un número entero de veces en la cantidad que se desea medir, lo que lleva a explicitar la insuficiencia de los números naturales para expresar los resultados.

Vale aclarar aquí una cuestión respecto de la medida y de los números racionales. Hemos dicho ya que sin los números racionales, esto es, sin los números que pueden expresarse como el cociente de dos números enteros (con el divisor distinto de cero), no habría posibilidad de expresar muchas medidas. Sin embargo, existen medidas que no pueden expresarse con números racionales, como es el caso de la longitud de la diagonal de un cuadrado de 1 cm de lado, que es 2, o la razón entre la longitud de una circunferencia y su diámetro, que es Π. Los números que expresan estas medidas, de los cuales 2 y Π son sólo dos ejemplos, no serán estudiados en el Segundo Ciclo.

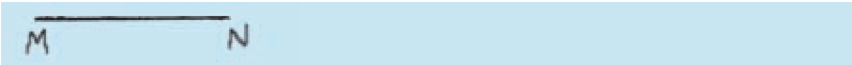
En el caso de la longitud, es posible combinar actividades que requieren medir o construir segmentos con otras en las que se trabaja sobre la recta numérica, teniendo en cuenta que esta forma de representación requiere, además, de un trabajo específico. Un ejemplo de esta combinación es el siguiente:

1. Hallá la medida de los segmentos PQ y RS, considerando U como unidad en ambos casos.

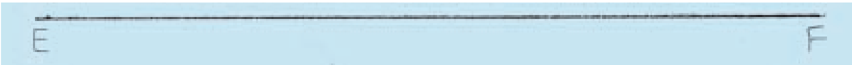
2. Trazá segmentos cuyas medidas resulten:
a) 2 y $\frac{1}{4}$ de la unidad U.

b) 1 y $\frac{5}{4}$ de la unidad U.

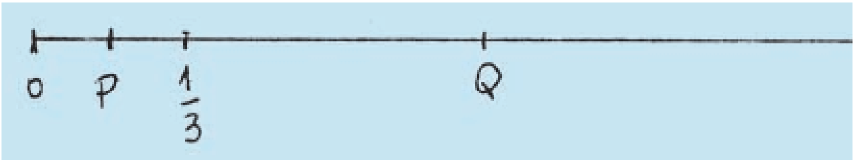
3. a) Si el siguiente segmento mide $\frac{1}{3}$ de la unidad, dibujá la unidad.

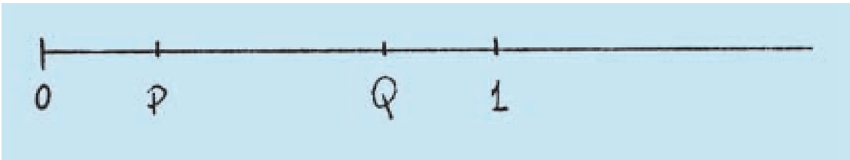


b) Si el siguiente segmento representa $1\frac{3}{4}$ de la unidad, dibujá la unidad. Explicá cómo lo pensaste.



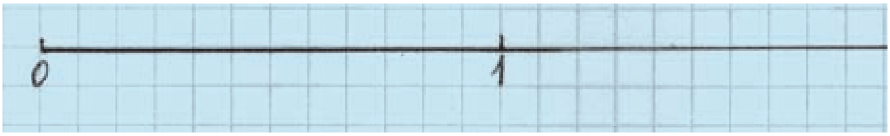
4. Indicá en las siguientes rectas los números que corresponden a la posición de los puntos P y Q:





En este tipo de problemas, resulta muy importante tener en cuenta que las estrategias puestas en juego pueden ser muy diferentes, según cuál sea la información que se da y los instrumentos disponibles. Por ejemplo, los alumnos suelen recurrir espontáneamente a medir con la regla sin tener en cuenta que, en casos como el del problema 3, se puede obtener la unidad repitiendo la parte que se conoce como dato sin conocer su longitud. Aun contando con el uso de la regla, en el caso del problema 2, los procedimientos varían si la medida de U, en centímetros, es o no múltiplo de 2. En el problema 3 a), si en lugar de 1/3 se usa 2/3, algunos alumnos considerarán que para encontrar el tercio que falta tienen que dividir el segmento en tres partes iguales y no en 2, hipótesis que puede reforzarse si el segmento original mide 3 cm.

A su vez, cuando presentemos las actividades donde se pide representar en la recta numérica, tendremos que tener en cuenta: si la longitud del segmento unidad (en cm o en “cuadraditos”, en el caso de usar papel cuadriculado) es o no múltiplo de los denominadores de las fracciones que se quieren representar, si se dan las posiciones del 0 y el 1 o del 0 y otro número. En este sentido, las estrategias que se usan para representar, por ejemplo 1/3 y 1/4, en los casos que siguen no son las mismas y ponen en juego distintos conocimientos.



En 4° año/grado, seguramente los alumnos ya se han iniciado en la exploración y resolución de situaciones de reparto, donde la cantidad que corresponde a cada parte se expresa con una fracción. A modo de ejemplo, presentamos a continuación un conjunto de actividades[13] asociadas a repartos que permiten promover un trabajo de análisis y comparación de procedimientos propios y ajenos utilizados para la resolución de una situación.

En este sentido, la idea es enriquecer el tipo de trabajo que se realiza con más frecuencia en la resolución de situaciones[14], sin relegar a un segundo plano el análisis de lo producido por los mismos chicos o por otros.

[13] Problemas extraídos de *Matemática. Fracciones y Números decimales. Apuntes para la enseñanza* (2005), Gobierno de la Ciudad de Buenos Aires, Secretaría de Educación. Dirección General de Planeamiento. Dirección de Currícula.
Recomendación de lectura: la lectura del material citado permitirá una mayor profundización del tema y consultar más ejemplos de actividades.

[14] **Recomendación de lectura:** véase el apartado “La gestión de la clase”, en “Enseñar Matemática en el Segundo Ciclo“ de este *Cuaderno*, para profundizar sobre el sentido de elaborar argumentos y compararlos con los de otros compañeros.

Secuencia para establecer relaciones y argumentar sobre ellas: "Repartir de distintas formas"

En esta secuencia trabajamos en un contexto que no es nuevo para los alumnos y lo hacemos con fracciones conocidas, pero planteamos una tarea que, según el trabajo realizado en 4º año/grado, puede ser nueva.

Se trata aquí de elaborar argumentos y criterios independientemente de los procedimientos empíricos, como la realización efectiva del reparto o de una representación en dibujos de la situación planteada, con todo lo que esto significa para el avance en la adquisición de herramientas matemáticas para los alumnos.

Para cada una de las actividades siguientes, el docente podrá pedir a cada chico que copie el enunciado del pizarrón o podrá darle una fotocopia.

Actividad 1

• Reunite con un compañero y leé cómo pensaron Ale y Jime para repartir 3 chocolates iguales entre 4 chicos.

• Discutí con tu compañero si son o no equivalentes los repartos que proponen Ale y Jime, y explicá por qué sí o por qué no.

Para resolver esta primera actividad, los alumnos tendrán que expresar con fracciones los resultados de las dos acciones y decidir si dar 3 de 1/4 es lo mismo que dar 1/2 y 1/4 a cada uno. Si los alumnos ya hubieran trabajado suficientemente con este repertorio, es posible plantear otros repartos, como por ejemplo 6 entre 5 y comparar 6 veces 1/5 y 1 + 1/5. De esta manera, son enfrentados con la idea de que una misma cantidad puede expresarse de diferentes formas, lo que permitirá luego avanzar hacia la idea más general de que un mismo número puede representarse de diferentes maneras.

Actividad 2

• Reunite con un compañero y leé cómo pensaron Vanesa y Joaquín para repartir 23 chocolates iguales entre 5 chicos.

• Discutí con tu compañero si los repartos que proponen Vanesa y Joaquín son o no equivalentes, y explicá por qué sí o por qué no.

En este segundo problema, se amplía el repertorio con relaciones entre quintos y décimos. La mayor dificultad aquí es encontrar la fracción que exprese la quinta parte de 1/2. Se espera que los alumnos, apoyados en conocimientos anteriores, elaboren explicaciones del tipo: *Al dividir una mitad en cinco partes iguales, los pedacitos que se obtienen son de un tamaño tal, que con diez de los mismos se completa un chocolate entero, es decir que 1/5 de 1/2 es 1/10.* El avance en esta actividad, en relación con la anterior, está dado no sólo por la idea de fracción (1/5 de 1/2), sino también por la dificultad de determinar la equivalencia de las escrituras. Los resultados de uno y otro reparto son: 4 y 3/5 para el caso de Vanesa y 4 1/2 y 1/10 para Joaquín. Una manera de argumentar sobre la equivalencia sería: *como 1/2 es equivalente a 5/10, entonces 1/2 y 1/10 es equivalente a 6/10. Además, 3/5 se puede pensar como 3 veces 1/5 , que es lo mismo que 3 veces 2/10, porque 1/5 = 2/10, y entonces 3/5 es lo mismo que 6/10.* A continuación, es posible proponer a los niños que escriban este razonamiento utilizando cálculos equivalentes: 3/5 = 3 x 1/5 = = 3 x 2/10 = 6/10, para volver luego sobre ellos.

Actividad 3

• Leé cómo se repartieron 8 chocolates iguales entre 3 chicos.
Se han partido por la mitad 6 chocolates y se entregaron cuatro mitades a cada uno. Luego, los 2 chocolates restantes se cortaron en tres partes cada uno y se le entregaron dos de esas partes a cada chico.

• Buscá otros repartos que sean equivalentes a este.

• Anotá las expresiones fraccionarias que surgen y pensá cómo podrías explicar que son expresiones equivalentes que representan todas la misma cantidad. Escribí en una hoja tu explicación.

En esta actividad, el foco está puesto en la producción de expresiones equivalentes para una misma cantidad. No se trata de una tarea fácil, por lo que sería conveniente organizar un trabajo colectivo una vez que los alumnos hayan comprendido el reparto realizado. Se espera que al final de este trabajo colectivo se extraigan conclusiones tales como: *1 es lo mismo que 3/3; 2 es lo mismo que 6/3, por lo tanto 6/3 y 2/3 es lo mismo que 8/3, u 8 dividido 3 da 2, y los 2 que quedan se reparten entre 3 y a cada uno le toca 2/3, así que queda 2 y 2/3.* Es posible también que los alumnos lleguen a la conclusión de que el resultado de 8 dividido 3 es 8/3 y, de modo más general, que *se puede pensar una fracción como el resultado de un reparto en el que el dividendo es el numerador y el divisor, el denominador.* Nuevamente, si se propone otra actividad en la que se planteen otros repartos, se podría dar lugar a ampliar el repertorio conocido.

Es importante que luego de la producción de los alumnos y de las discusiones colectivas que se planteen, se guarde un registro, en los cuadernos o en las carpetas, de las conclusiones a las que se arribó. De esta manera, se van sistematizando los conocimientos y se puede recurrir a ellos para resolver otras situaciones o para estudiar. Por ejemplo, a partir de estas situaciones se podrían anotar conclusiones como las siguientes: *Una misma cantidad se puede representar con números diferentes*[15]*: 3/4 es lo mismo que 1/2 y 1/4; 5/4 es lo mismo que 1 y 1/4;* $1\frac{1}{2}$ *se puede armar con 6 de 1/4, por lo tanto* $1\frac{1}{2}$ *es lo mismo que 6/4, etc.* O bien: *1/5 de 1/2 es una parte tal que se necesitan 5 de esos pedacitos para completar 1/2, entonces se necesitan 10 de esos pedacitos para completar el entero; así, resulta que 1/5 de 1/2 es igual a 1/10.*

Agregar nuevos problemas de reparto, con distintas cantidades como datos, pero con los mismos resultados (3 chocolates entre 4 chicos, 6 entre 8, 30 entre 40) permitiría focalizar el análisis sobre fracciones equivalentes, derivadas de repartos equivalentes. A su vez, volver sobre los cálculos equivalentes, como 3/5 = 3 x 1/5 = 3 x 2/10 = 6/10 para analizarlos, podría dar lugar a discutir sobre cómo obtener una fracción equivalente a una dada. Se trata de avanzar desde un razonamiento particular sobre un problema que involucra cantidades en un reparto concreto a la elaboración de un procedimiento más general que "vale" para cualquier fracción.

De este modo, los alumnos podrían llegar a afirmar: *Si dividís el numerador y el denominador por 2, por 3 o por 5, te da una fracción equivalente.* O bien: *Para tener una fracción equivalente hay que multiplicar el numerador y el denominador por el mismo número.* Es importante que estas afirmaciones surjan como producto de una elaboración colectiva y no como una regla presentada por el maestro que se acepta y se usa de modo mecánico[16].

Queremos hacer notar, finalmente, que en este conjunto de actividades se abordaron varias nociones juntas (fracción de fracción, equivalencia de fracciones, composición de cantidades como suma de ciertas fracciones, etc.), poniendo en evidencia que están relacionadas. Muchas veces, al presentarlas separadamente para que los alumnos "no se confundan" y puedan "fijar" los conocimientos, perdemos en significatividad. Recordemos que, en este Ciclo, buscamos que los alumnos y alumnas avancen en la explicitación de sus conocimientos matemáticos, pudiendo establecer relaciones entre ellos, y esto no se favorece si las nociones se presentan aisladas unas de otras.

---

[15] **Recomendación de lectura:** véase el apartado "Las representaciones" en "Enseñar Matemática en el Segundo Ciclo" de este *Cuaderno*.

[16] **Recomendación de lectura:** véase el apartado "Las situaciones de enseñanza" en "Enseñar Matemática en el Segundo Ciclo" de este *Cuaderno*.

Si bien en algunas de las actividades anteriores ya se ha incluido el uso de **expresiones decimales**, es posible que en 5º año/grado sea necesario volver sobre algunas situaciones que involucren la explicitación de la organización del sistema monetario[17]. Actividades como la composición y descomposición de una cierta cantidad con monedas de determinada clase y la escritura de dichas cantidades nos permiten diagnosticar el estado de los conocimientos de los alumnos sobre las escrituras decimales. Asimismo, tendremos que considerar si los niños pueden establecer relaciones con las fracciones decimales, como por ejemplo que 10 centavos = 1/10 de $ 1 o $ 0,10; 1 centavo = 1/100 de $ 1 o $ 0,01.

Para continuar con el tratamiento de las expresiones decimales, más allá de los décimos y centésimos, será necesario incluir situaciones que involucren mediciones o cálculos de medidas que habiliten la introducción de nuevas particiones de la unidad, cada vez más pequeñas. Si solo mantenemos el trabajo con dinero no será posible, por ejemplo, advertir que la noción de siguiente, propia de los números naturales, no puede extenderse a los racionales, ya que si bien entre $ 2,99 y $ 3 no hay otro precio posible, entre 2,99 y 3 hay infinitos números racionales.

Plantear situaciones para comparar cantidades y números

Para que los chicos puedan comparar cantidades y números expresados con fracciones o decimales, es necesario, desde el enfoque que planteamos, que estos números sean utilizados inicialmente como un recurso para resolver problemas. Pero, avanzar en la comprensión de la noción de número racional requiere, además de usar expresiones decimales y fracciones para representar resultados de mediciones o repartos, establecer relaciones de orden entre números y precisar cuáles son los criterios que permiten determinar este orden cuando se comparan distintos tipos de escrituras. En este caso, se trata de relaciones entre fracciones, entre expresiones decimales y con el entero, en particular de comparaciones, ya que estamos haciendo referencia a expresiones como *1/2 es igual que 2 de 1/4*, en la que se comparan números. O bien: *3 de 25 centavos es menos que 1 peso*, en la que se comparan cantidades.

[17] **Recomendación de lectura:** véanse los documentos *Acerca de los números decimales: una secuencia posible. Aportes para el desarrollo curricular* (2001), Gobierno de la Ciudad de Buenos Aires, Secretaría de Educación y *Matemática. Fracciones y números decimales. 5° grado. Apuntes para la enseñanza* (2005), Gobierno de la Ciudad de Buenos Aires. Secretaría de Educación. Dirección General de Planeamiento. Dirección de Currícula.

Para los niños, que intentan conservar y extender los conocimientos adquiridos en relación con los números naturales, no es fácil advertir que 0,0867 no es mayor que 1, 2, aunque tiene más cifras, o que 4/5 no es el siguiente de 3/5, y esta situación se complica aun más cuando se trata de comparar 1,5 y 1/5.

En 4° año/grado, se partió de situaciones de **comparación de cantidades** en el contexto del dinero y de las unidades de medida, por ejemplo *Ayer Martín compró 3/4 kg de pan y hoy compró 3 bolsitas de medio kilo. ¿Cuándo compró más pan?* O bien: *Marisa y Rocío hicieron una colecta para comprar juguitos. Marisa logró juntar 5 monedas de 50 centavos y Rocío juntó 12 monedas de 10 centavos. ¿Cuál de las dos juntó más dinero?* La familiaridad de los alumnos con contextos cotidianos les permite resolver con procedimientos propios y, de esta manera, se van explicitando las primeras relaciones entre cantidades (2/4 kg = 1/2 kg; 1kg = 4/4 kg; 10 de 10 centavos es 1 peso; 4 de 25 centavos es un peso) y se formulan los primeros argumentos ligados muy fuertemente a los conocimientos que aporta el contexto.

Cabe aclarar aquí que el repertorio de expresiones fraccionarias que se usa efectivamente en contextos cotidianos es muy acotado y que muchas veces, al intentar ampliar este repertorio, manteniendo la "familiaridad" con el entorno, se fuerzan enunciados que no resultan verosímiles y que, por lo tanto, no nos permiten usar el contexto como apoyo para elaborar un procedimiento o evaluar la razonabilidad de la respuesta que se obtiene. Aunque es frecuente encontrar enunciados de este tipo en muchos libros de texto, resulta importante que estemos atentos a los problemas en los que el uso de las fracciones solo tiene sentido en el ámbito escolar, como cuando se indica, por ejemplo, comparar las partes que se pintaron de una pared en distintos días.

Así, se hace necesario que vayamos llevando paulatinamente a los niños y niñas a establecer relaciones numéricas. Para que este trabajo resulte para ellos un verdadero proceso de construcción, es necesario posibilitarles, desde las situaciones de enseñanza, la recuperación de las herramientas utilizadas en los primeros problemas para la resolución de estos nuevos desafíos. Cuando hablamos de recuperar estas herramientas propias de los alumnos nos referimos al planteo de situaciones fuera de los contextos usuales, pero que requieran el uso de las herramientas construidas al resolver problemas en ellos.

En este sentido, para dar oportunidad de **comparar números**, es posible plantear consignas como las siguientes:

• Usando lo que sabés acerca del dinero, explicá cada una de las siguientes relaciones:

a) $1{,}5 > 1{,}05$ $\quad$ $0{,}75 < 0{,}90$
$0{,}1 > 0{,}01$ $\quad$ $1{,}25 < 1{,}5$

b) $0{,}1 : 10 = 0{,}01$ $\quad$ $0{,}01 \times 10 = 0{,}1$
$0{,}01 = \frac{1}{100}$

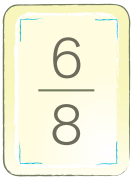
En la actividad a), se propone que los chicos apelen al conocimiento de relaciones entre cantidades que estaban utilizando, para explicar relaciones entre números (decimales y el entero, decimales entre sí). Algunos procedimientos posibles podrían ser: *1,5 es 1 peso con 50 centavos, así que es más que 1,05, que es 1 peso y una monedita de 5 centavos.* O, por ejemplo, *0,1 es una moneda de 10 centavos y 0,01 vendría a ser como una monedita de 1 centavo.* Realizar esta explicación es lo que pone a los alumnos en situación de buscar la relación entre lo que conocen dentro de un contexto y venían haciendo para resolver los problemas planteados, con la resolución de estos ejercicios.

En la actividad b), esperamos poner en discusión la relación que existe entre la escritura decimal y la multiplicación y la división por 10, 100, etc. Una vez más, aquí no estamos entendiendo la enseñanza como "mostrar el procedimiento" para comparar decimales, sino que esperamos que los alumnos puedan llegar a establecer una regla a partir de la reflexión acerca de sus procedimientos y no que la memoricen luego de haber sido mostrada por el docente. De esta manera, la técnica puede adquirir sentido y es posible tener recursos de control sobre ella.

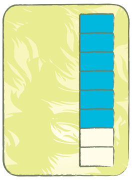
Otro tipo de actividades que también apuntan a ir haciendo avanzar los procedimientos de comparación de los alumnos son, por ejemplo, aquellas donde se propone elaborar criterios de comparación entre números fraccionarios o decimales, usarlos, probarlos, contrastarlos con otros[18]. En 5° año/grado, estos criterios podrían surgir como conclusiones del debate posterior sobre el siguiente juego:

"Guerra de fracciones": comparar fracciones.
Materiales: cada grupo debe tener un mazo de cartas. En ellas, el anverso tendrá una fracción y el reverso una representación de la misma.

[18] **Recomendación de lectura:** para analizar las propuestas, véase el apartado "Plantear situaciones para comparar cantidades y números", en "Para leer y escribir fracciones y expresiones decimales" de *Cuadernos para el aula: Matemática 4.*



Anverso



Reverso

La composición del mazo de cartas dependerá del repertorio de fracciones que se esté trabajando. Una posibilidad es usar las cartas del material recortable de Juegos en Matemática EGB 2[19] y otra es fabricarlas con tarjetas y, por ejemplo, incluir las cartas de medios, cuartos y octavos mayores y menores que la unidad:

$$1 - \frac{1}{2} - \frac{2}{2} - \frac{3}{2} - \frac{1}{4} - \frac{2}{4} - \frac{3}{4} - \frac{4}{4} - \frac{5}{4} - \frac{6}{4} - \frac{1}{8} - \frac{2}{8} - \frac{3}{8} -$$
$$\frac{4}{8} - \frac{5}{8} - \frac{6}{8} - \frac{7}{8} - \frac{8}{8} - \frac{9}{8} - \frac{10}{8} - 1\frac{1}{4} - 1\frac{2}{4} - 1\frac{3}{4} - 1\frac{1}{8} - 1\frac{2}{8} - 2$$

Otra posibilidad sería usar medios, tercios y sextos.
Organización de la clase: se forman grupos de 4 alumnos.
Desarrollo: se mezclan y se reparten todas las cartas con la representación numérica hacia arriba, formando 4 pilas iguales, una para cada jugador. Los 4 colocan a la vez en el centro la carta superior de su pila. El que tiene la carta de mayor valor se lleva las tres o cuatro cartas y las coloca aparte, en otra pila personal. Las cartas llevadas no se vuelven a usar. Si algún jugador duda, puede dar vuelta las cartas y usar la comparación de los cuadrados pintados en el reverso. Si hay empate, se juega otra vuelta y el ganador se lleva las ocho cartas. Gana quien al final del juego tiene más cartas.

Después de jugar, los alumnos podrán explicitar qué argumentos usaron para comparar las cartas con representaciones numéricas, sin recurrir a la comparación de los reversos de las cartas.

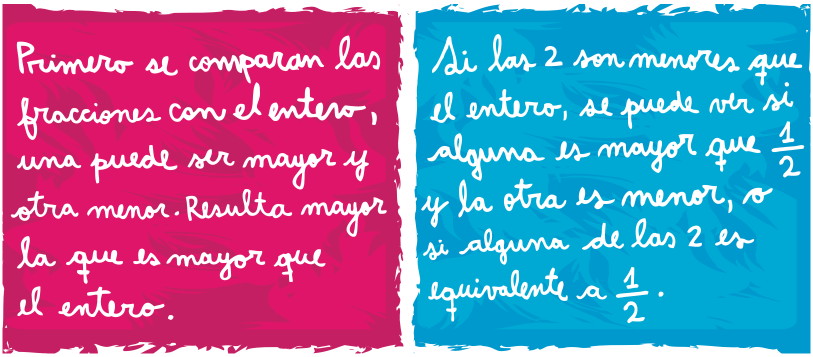
Siguiendo con este trabajo, propondremos luego actividades para la exploración y explicitación de los límites de utilización de diferentes criterios de comparación.

[19] Estas cartas están disponibles en *Juegos en Matemática EGB 2. El juego un recurso para aprender.* (Material recortable para alumnos). En la pág.17 del Material para el docente, pueden encontrarse otras propuestas que permiten trabajar en el mismo sentido.

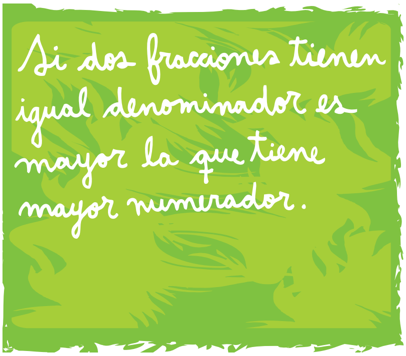
Llamamos aquí *exploración* al trabajo que el alumno hace sobre la situación problemática cuando aún no tiene la herramienta experta para resolverla, pero puede utilizar otros conocimientos matemáticos para intentarlo. Esta exploración se va dando en la resolución de las diferentes situaciones que sobre un mismo contenido va planteando el docente; la resolución de esos problemas les da a los alumnos información acerca de los objetos matemáticos que están usando, ¿qué son?, ¿cuándo se usan?, ¿cómo se usan? Sin embargo, para hacer avanzar a los alumnos desde esta exploración hacia una sistematización del contenido en cuestión es necesario ponerlos en posición de explicitar lo que han ido aprendiendo del objeto matemático de estudio a lo largo de las resoluciones realizadas.

Una actividad que propone explorar y explicitar los límites de utilización de diferentes criterios de comparación es analizar un listado de estos criterios con la siguiente consigna[20]:

- Las afirmaciones siguientes fueron utilizadas por algunos alumnos para comparar fracciones. Leelas con atención.



[20] **Recomendación de lectura:** actividades como la aquí planteada aparecen en *Matemática. Fracciones y números decimales. 5° grado. Apuntes para la enseñanza* (2005), Gobierno de la Ciudad de Buenos Aires. Secretaría de Educación. Dirección General de Planeamiento. Dirección de Currícula.



• Analizá cada una de las afirmaciones anteriores y respondé si son válidas para comparar alguno de los pares de fracciones que se presentan a continuación. Justificá tu respuesta.

$\frac{7}{8}$ y $\frac{11}{6}$ $\frac{7}{10}$ y $\frac{7}{4}$ $\frac{2}{6}$ y $\frac{2}{5}$

$\frac{12}{5}$ y $\frac{18}{5}$ $\frac{17}{22}$ y 1 $\frac{7}{9}$ y $\frac{5}{12}$

Para evaluar si es posible utilizar o no alguno de los criterios que se presentan aquí es necesario, en primera instancia, interpretarlos, lo que implica un avance sobre lo requerido en las tareas realizadas anteriormente, ya que aquí hay que entender un criterio que elaboró otra persona, hay que ser capaz de interpretar una técnica explicada coloquialmente para poder opinar sobre su validez. Por lo tanto, convendrá prever las discusiones acerca de qué entendieron los alumnos, qué quiere decir o cómo se usa cada uno de los criterios. Si, en otras ocasiones, ha sido el docente el que interpretó una técnica y la explicó, la tarea de discusión colectiva puede ser novedosa para muchos alumnos.

El interés de esta actividad reside en responder a preguntas como las siguientes: *¿Para qué pares de fracciones se puede aplicar el primer criterio?, ¿por qué no se lo puede aplicar, por ejemplo, al par 2/5 y 2/6?* De este modo, los chicos pueden explicitar los límites de utilización de los criterios. Las conclusiones de estas discusiones se pueden registrar en las carpetas o en los cuadernos. Los criterios que se proponen para analizar pueden haber surgido en clase, como en el ejemplo del juego de la guerra de fracciones, o no. Podemos proponer otros que no se les hayan ocurrido a los alumnos o que usan incorrectamente. Por ejemplo, si los alumnos únicamente evalúan si la fracción es más grande o más chica que el entero para poder comparar (usan el primer criterio), es un buen momento para presentar un criterio como el segundo de esta actividad, donde se toman los medios como punto de referencia.

Cuando ya se ha discutido acerca de que no todos los criterios sirven para cualquier número, es bueno que volvamos a enfrentar a los alumnos con la tarea de formular un criterio de comparación, presentando nuevos desafíos:

- Los siguientes son pares de fracciones que no se corresponden con ninguno de los criterios que se vieron hasta ahora. Discutí con tu grupo y elaborá un criterio que sirva para estos pares de fracciones. Fundamentá tu respuesta.

  $\frac{2}{6}$ y $\frac{2}{5}$ $\qquad$ $\frac{17}{22}$ y 1

- Federico realizó las siguientes comparaciones entre decimales:

  3,12 es mayor que 3,7 $\qquad$ 4,50 es mayor que 4,6

  ¿Cuál creés que pudo haber sido el criterio que utilizó para realizar las comparaciones?

En el primer problema, se vuelve sobre los criterios para comparar fracciones. Aunque es fácil que los alumnos tengan en cuenta que *si se divide el entero en mayor cantidad de pedacitos, los pedacitos son cada vez más chicos,* para utilizar esto como criterio de comparación, es necesario tener dos fracciones que tengan igual numerador, ya que *si los pedacitos son chiquitos, pero son muchos, puede ser una fracción más grande que otra que tenga pedazos más grandes, pero pocos.*

En el segundo problema, se trata de descubrir un criterio utilizado por otro. Este criterio está elegido porque suele ser utilizado por los chicos al comparar expresiones decimales. Es frecuente que los alumnos intenten extender a las fracciones y decimales el uso de propiedades aprendidas en el trabajo con números naturales, lo que origina dificultades a la hora de comparar racionales. Para muchos alumnos, *3,12 es mayor que 3,7 porque 12 es mayor que 7*. Situar a los alumnos en posición de explicitar estos criterios y analizarlos, permite objetivar el error para comprenderlo y revisarlo, dando lugar a un nuevo conocimiento acerca de cómo juegan las posiciones de los números después de la coma decimal. Algo interesante de esta actividad es que en la pregunta no se evidencia un juicio de valor acerca del criterio, no se dice si es un criterio válido o no, por lo tanto se deja abierta la posibilidad de que muchos alumnos identifiquen y expliciten el criterio, totalmente convencidos de que es eficaz.

Hasta aquí, las actividades que mostramos implican la comparación entre fracciones y el entero o la comparación de fracciones entre sí y entre decimales y el entero o decimales entre sí; sin embargo, un avance que se propone desde los NAP para este año es trabajar las relaciones que se pueden dar entre ambos tipos de representaciones. Una posibilidad para propiciar este tipo de trabajo, a la vez que seguimos trabajando la ***necesidad*** de dar argumentos[21] para fundamentar las comparaciones realizadas, es jugar a “Descubriendo equivalentes”.

“Descubriendo equivalentes”: comparar escrituras fraccionarias y decimales.
Materiales: un juego formado por 42 tarjetas con distintas escrituras numéricas, como las siguientes[22], sin incluir las tarjetas que no responden a los conocimientos que los niños manejan, como por ejemplo las de porcentaje:

1	$1\frac{1}{4}-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}\times 2$	$\frac{3}{4}+\frac{1}{4}$	100%	$\frac{10}{10}$
0,5 + 0,5	1,5 + 0,5	50%	$\frac{1}{2}$	0,5	$\frac{5}{10}$
$\frac{1}{4}\times 2$	$\frac{50}{100}$	$\frac{3}{4}-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}+\frac{1}{4}$	$1\frac{1}{4}-1$	25%

Organización de la clase: en grupos de 4 integrantes.
Desarrollo: se colocan las tarjetas boca abajo, con una disposición rectangular. Por turno, cada jugador levanta dos, de manera que las vean los cuatro integrantes del grupo. Si quien las levantó identifica que las dos tarjetas corresponden a distintas representaciones de un mismo número racional, lee en voz alta ambas tarjetas, y si todos acuerdan, se las lleva y se anota para sí ese número como puntaje. Si alguien no acuerda, se discute en el grupo para decidir quién tiene razón.
Si quien levantó las fichas decide que estas no corresponden a representaciones del mismo número, las vuelve a colocar en el mismo lugar, boca abajo.
En ambos casos, le toca el turno al compañero siguiente.
Cuando no quedan más tarjetas sobre la mesa, se suman los puntos que acumuló cada uno; después de controlar y acordar con el resultado, gana quien haya logrado la mayor suma.

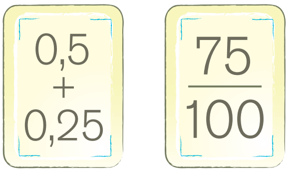
---

21 **Recomendación de lectura:** véase el apartado “La gestión de la clase” en “Enseñar Matemática en el Segundo Ciclo” de este *Cuaderno*, en lo referido a las argumentaciones de los alumnos.

22 **Recomendación de lectura:** véanse las propuestas de juegos sugeridas en la página 20 de Chemello, G. (coord.), Hanfling, M. y Machiunas, V. (2001), *El juego como recurso para aprender. Juegos en Matemática EGB 2, Material para docentes.* Buenos Aires, Ministerio de Educación, Ciencia y Tecnología. En el Material para alumnos se pueden encontrar las tarjetas aquí propuestas diseñadas para ser recortadas.

Decimos que este es un juego que exige la elaboración de argumentos por parte de los alumnos sobre la validez o no de una comparación entre expresiones decimales, naturales y fraccionarias, ya que es necesario llegar a un acuerdo acerca de la equivalencia de las cartas de cada jugador para que sea posible levantarlas. Es fundamental aquí que remarquemos la importancia de argumentar con fundamentos que puedan convencer a los compañeros, ya que ese es el criterio que se utilizará para poder levantar cada par de cartas.

Por otra parte, es importante tener en cuenta que el aprendizaje no termina con el juego de los alumnos, sino que tienen que organizarse actividades de reflexión sobre lo que se hizo para favorecer determinados aprendizajes. Plantear partidas simuladas nos da una muy buena oportunidad para analizar procedimientos que se aprecien como interesantes por las características de las relaciones que se necesitarán establecer y que no necesariamente han aparecido mientras se realizó el juego. Por ejemplo:



- Marisa quería levantar 0,5 + 0,25 y $\frac{75}{100}$ y Rita dijo que no podía, porque $\frac{75}{100}$ es igual a 0,75 y la suma de los decimales da 0,30. ¿Quién tiene razón?

Esta partida simulada pone en discusión algunos temas interesantes que se pueden presentar al comparar fracciones y decimales. Un error muy común en los alumnos a la hora de sumar decimales es que interpretan el 5 décimos con el mismo valor que el 5 centésimos, porque sigue jugando aquí la idea que conocen de números naturales: *Si es 5, entonces es menor que 25, sea cual fuere la posición que ocupe.* El hecho de que los ceros a la izquierda de una cifra intervengan en la atribución del valor posicional es algo nuevo que les pasa a estos números y no ocurría con los otros conocidos, por eso es un concepto difícil de construir. En este sentido, es bueno tomar esta idea en diferentes momentos del aprendizaje, y recurrir a un contexto en el cual apoyarse con actividades como las que planteamos más arriba. Las distintas discusiones permitirán afianzar el conocimiento de algunos alumnos y abrir el tema para otros niños o niñas que en un momento anterior no hayan podido entender la cuestión y que ahora hayan adquirido mejores recursos como para posicionarse diferente frente al mismo debate.

Otro tema interesante que pone en evidencia esta situación es la equivalencia entre 75/100 y 0,75 que para algunos alumnos puede ser muy obvia, pero para otros no tanto y es fundamental ir cuestionando y socializando estas certezas.

También podría plantearse aquí que 0,5 + 0,75 = 0,50 + 0,75, argumentando que 5 décimos equivale a 50 centésimos. Esto permitiría volver sobre la estructura decimal del sistema de numeración señalando que diez centésimos forman un décimo, diez décimos una unidad, tal como ocurre con las unidades, las decenas, las centenas, etc., extendiendo la regla de agrupamiento del sistema ya conocida para los naturales.

Para avanzar en el uso de operaciones con números naturales al resolver problemas

Si bien es cierto que la construcción de significado de las cuatro operaciones básicas con números naturales (suma, resta, multiplicación y división) es un aspecto que se atiende durante todo el Primer Ciclo[23], es importante no abandonar esta mirada y avanzar en la presentación de nuevos problemas. En estas situaciones, es importante hacer hincapié en el análisis del tipo de cálculo a realizar, exacto o aproximado, a partir de la reflexión sobre la pregunta y de la forma de calcular según cuáles sean los números que intervienen en el problema. Asimismo, es fundamental tener en cuenta, para controlar los procedimientos y evaluar la razonabilidad del resultado, cuáles son las cantidades involucradas.

Combinar las distintas operaciones, argumentar acerca de un procedimiento de resolución, reconocer que diferentes operaciones pueden dar respuesta a la misma cuestión, producir enunciados que respondan a los diferentes significados que tiene cada operación, interpretar la información presentada en textos, tablas y gráficos estadísticos, analizar el tipo de cálculo requerido (exacto, aproximado, mental, escrito, con calculadora) y evaluar la razonabilidad del resultado obtenido serán algunas de las competencias que se esperan lograr promediando el segundo ciclo.

En este año, además, se propondrá, en el campo de los problemas multiplicativos, avanzar con aquellos que conducen a la construcción del concepto de proporcionalidad y aquellos que llevan a sistematizar relaciones como las de múltiplo y divisor.

[23] **Recomendación de lectura:** las propuestas sobre este aspecto se pueden consultar en los apartados “Para operar al resolver problemas con distintos procedimientos” en el Eje “Número y Operaciones” y “Los significados”, en “Enseñar Matemática en el Primer Ciclo” de *Cuadernos para el aula: Matemática 1, 2* y *3*, respectivamente, y en el apartado “Para avanzar en el uso de las operaciones con números naturales al resolver problemas” en el Eje “Número y Operaciones”, de *Cuadernos para el aula: Matemática 4.*

Plantear situaciones para operar con distintos significados

En el trabajo desplegado desde el comienzo de la escolaridad, los chicos fueron descubriendo que cada una de las operaciones les permite resolver una variedad de situaciones, lo que da lugar a asociarlas a diferentes significados[24] y también a descubrir que una misma situación se puede resolver con distintas operaciones, es decir que hay más de un procedimiento válido para resolverla.

En 5º año/grado, se trata de continuar lo planteado en años anteriores, incluyendo nuevos contextos acordes con los intereses y posibilidades de los niños, cuidando que al incrementar la cantidad de cifras no se presenten situaciones no verosímiles. Se incluyen también problemas que requieren varios pasos combinando distintas operaciones o que tienen varias preguntas para que los chicos seleccionen entre la información ofrecida, los datos que les permitan llegar a cada respuesta. Por otro lado, podremos presentar las situaciones en distintos portadores: enunciados, tablas, ilustraciones.

Por tanto, en relación con los problemas que se pueden resolver con suma y resta, los chicos seguirán resolviendo aquellos donde deban unir o separar dos cantidades, buscar la diferencia entre ellas, encontrar el complemento de una respecto de otra, agregar o quitar una cantidad a otra y componer relaciones, es decir problemas en los que se producen dos transformaciones.

En cuanto a los problemas que se resuelven con multiplicaciones y divisiones, continuaremos trabajando con los que involucran proporcionalidad simple, incluyendo casos de organización rectangular de sus elementos, y avanzaremos en otros más complejos con propuestas como las que se desarrollan en el próximo apartado.

Algunos problemas interesantes de varios pasos y varias operaciones son los siguientes:

1. Pedro, el cajero del teatro “Español”, le entrega al dueño esta tabla con la cantidad de entradas vendidas cada día para el control de lo recaudado en la semana. Las entradas cuestan \$ 25 para mayores y \$ 12 para menores.

a) Pedro informa que solo un día se agotaron las localidades. Indicá qué día de la semana el teatro estuvo completo.

[24] **Recomendación de lectura:** para ampliar el análisis de los distintos significados de las operaciones, véase el apartado “Para operar al resolver problemas con distintos procedimientos”, en el Eje “Número y Operaciones” de *Cuadernos para el aula: Matemática 3* y *4.*

b) El dueño sostiene que ese día es el que más dinero se recaudó. ¿Estás de acuerdo?
c) ¿Cuánto se juntó el miércoles?, ¿y el domingo?
d) ¿Qué días de la semana se recaudaron menos de $ 4000?

TEATRO **ESPAÑOL**

	miércoles	jueves	viernes	sábado	domingo
Mayores	140	127	143	145	238
Menores	140	47	26	255	113

2. Para el aniversario de casados, María y José decidieron comprar en cuotas la heladera y el microondas que ofrece este negocio de electrodomésticos.

a) ¿Cuánto dinero ahorran si lo compran al contado?
b) ¿Cuánto tendrán que pagar el primer mes?, ¿y el último?

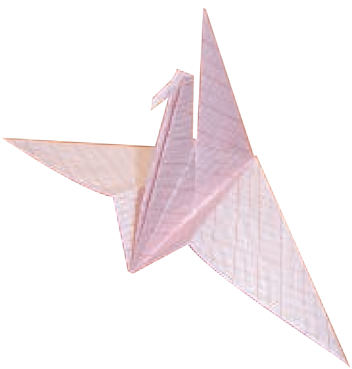
3. En una reconocida bodega de la provincia de San Juan, se han envasado 4000 botellas de una variedad muy especial. Para venderlas como regalos empresariales, quieren fabricar cajas en las que puedan colocar 12 botellas.

a) Para hacer el pedido exacto de cajas, ¿cuántas cajas necesitan?
b) Si ante el éxito de la propuesta deciden envasar otras 1300 botellas, ¿cuántas cajas más necesitarían?
c) Una empleada dice que tuvo que pedir 35 bolsas de corchos para todas esas botellas, pues en cada bolsa entra lo que se denomina una *gruesa*, es decir 144 corchos. ¿Fue adecuado el pedido que hizo la empleada?
d) Daniel dice que para envasar las 4000 botellas alcanza con 333 cajas, y Cacho sostiene que necesitan una más. ¿Con quién estás de acuerdo?
e) Un mayorista de cada una de las 24 provincias del país serán los vendedores exclusivos del artículo vitivinícola. Si el dueño de la bodega decide ser equitativo y entregar la misma cantidad a cada provincia, ¿cuántas cajas deberá entregar a cada mayorista?

4. Se llenaron 24 cajones con 64 manzanas cada uno. Si cada manzana pesa entre 150 y 200 gramos:
a) ¿podrías levantar uno de estos cajones?
b) Juan dice que un cajón pesa cerca de 100 kg y es imposible levantarlo. ¿Estás de acuerdo?, ¿cuál es el peso aproximado del cajón?

5. Un obrero gana por mes entre $ 450 y $ 800. Si ahorra su sueldo completo, ¿cuánto tardará como máximo en completar $ 8500?, ¿y como mínimo?

6. Como souvenir de su cumpleaños, Carla llenó una bolsa con grullas de papel y le alcanzó para todos sus 15 amigos. Si quería repartirlas dándole a cada uno por lo menos 10 grullas, ¿cuántas grullas tenía Carla como mínimo?



Para responder a cada una de las preguntas del problema 1, los chicos pueden hacer uso de distintos procedimientos, así como también de distintos tipos de cálculo. Por ejemplo, para discutir respecto de los distintos procedimientos, se puede analizar cómo resolvieron la pregunta c), ya que para saber cuánto se recaudó el miércoles, es posible sumar ambos valores de entrada y luego multiplicar el resultado por 140 o bien averiguar cuánto se recaudó con cada tipo de entrada y sumar después. Para responder la pregunta d), alcanza con hacer cálculos aproximados a diferencia de las otras, en las que se requieren resultados exactos. Por otra parte, la presentación en una tabla supone que los alumnos reconozcan la forma particular en la que está organizada la información para poder seleccionar los datos en función de la pregunta.

En cuanto a los problemas 2 y 3, la operación que resuelve con más eficacia es la división, pero, como puede analizarse, se trata de presentar preguntas que involucran tanto repartos como particiones para consolidar estos significados. En el problema 3, la pregunta c) promueve también el análisis del resto, ya que es necesario evaluar lo que sobra en cada una de las divisiones para acertar con el número de cajas.

En el problema 4, no es necesario dar un resultado exacto. En este problema no solo hay que operar, sino que también aparecen condiciones de máxima (si todas pesan 200 g) y de mínima (si pesan 150 g).

Los problemas 5 y 6 dan lugar a retomar el trabajo de considerar condiciones de máxima y de mínima y tomar decisiones en cuanto a la aproximación más conveniente.

En cuanto a los problemas de **combinatoria**, es decir aquellos en los que hay que combinar elementos de diferentes colecciones, presentaremos problemas con dos y tres variables. En el caso de los primeros, ya trabajados en años anteriores, los retomaremos con mayor cantidad de elementos de cada tipo para que, al tener que combinar "todos con todos", los chicos reconozcan en la multiplicación una herramienta eficaz que evita el trabajo de enumerar todos los pares[25]. Como problemas donde intervienen tres variables podemos presentar, por ejemplo:

- En la fiesta de 15 años de Mariela, los invitados podían elegir entre 2 tipos de entradas, 3 platos principales y 2 tipos de postres. El hermanito, Nahuel, dijo: *Así cada invitado pide un menú diferente*; ¿puede ser cierto lo que dijo?

[25] **Recomendación de lectura:** para un análisis más exhaustivo de los distintos procedimientos que pueden desarrollar los niños, se puede consultar el apartado "Plantear situaciones para multiplicar y dividir", en el Eje "Número y Operaciones" de *Cuadernos para el aula: Matemática 3.*

• María está preparando centros de mesa, todos diferentes, combinando una flor, una vela y una base, y tiene flores de 3 tipos distintos, 5 velas de diferentes colores y bases de distintas formas. Si necesita armar 30 centros de mesa, ¿cuántas formas de base necesita?

En el primer problema, cada chico tendrá que elegir cómo representar cada tipo de entrada, plato y postre para determinar que lo que afirma Nahuel solo es posible si los invitados eran 12. En el segundo problema, tendrán que buscar el número de bases resolviendo primero cuántas combinaciones de velas y flores puede hacer. En ambos casos, los procedimientos podrán variar según la experiencia previa en la resolución de problemas de combinatoria. Algunos podrán hallar el resultado multiplicando y otros podrán hacer algún esquema o diagrama en el que representen los elementos.

Plantear situaciones para analizar relaciones de proporcionalidad

La construcción del concepto de proporcionalidad demanda varios años de la escolaridad. Desde el Primer Ciclo, los chicos han resuelto situaciones de proporcionalidad simple al multiplicar o dividir, tales como *Si 1 paquete trae 4 figuritas, ¿cuánto traen 8 paquetes?* o bien: *Si 5 chocolates iguales cuestan $ 30, ¿cuánto cuesta cada uno?* También han usado las relaciones involucradas en la proporcionalidad de manera implícita cuando completan tablas y calculan el doble de una cantidad porque corresponde al doble de otra o suman las cantidades correspondientes a otras dos para encontrar el valor que corresponde a la suma. En 5º año/grado habrá que avanzar planteando problemas en los que se relacionan magnitudes directamente proporcionales, donde no se da el valor unitario.

Por otro lado, es importante tener en cuenta que en 5º año/grado se pueden incorporar nuevas representaciones de las relaciones de proporcionalidad a las ya conocidas de enunciado textual y de tabla; se trata de algunos gráficos estadísticos de barras o pictogramas.

Es habitual que, al inicio del trabajo de proporcionalidad, todas las situaciones que se presentan sean directamente proporcionales. En el trabajo matemático con una noción es necesario conocer en qué casos es posible usarla para resolver y también conocer sus límites, es decir en qué problemas no es posible usar la noción. En 5º año/grado, es necesario analizar los datos de distintas situaciones para ver si presentan o no una regularidad que cumpla con las propiedades de la **proporcionalidad directa**.

Entre los contextos que nos permiten proponer este trabajo, podemos considerar, entre otros, el cálculo de cantidades en una receta, el costo o la capacidad de distintos envases o el análisis de distintas ofertas. También es posible retomar problemas resueltos anteriormente, por ejemplo lo pagado por mes en el problema de las cuotas, la cantidad de cajas de vino y la cantidad de botellas, y explicitar si las relaciones entre las cantidades son o no de proporcionalidad.

Algunos ejemplos de problemas son los siguientes.

> • Indicá si cada una de las siguientes afirmaciones es verdadera o falsa:
> a) Para hacer una torta de manzana necesito 3 huevos, para hacer 3 tortas de manzana necesitaré el triple.
> b) Para embaldosar dos aulas iguales, necesito 238 baldosas, para embaldosar solo una, necesito 119.
> c) Si al año Ema pesa 12 kg, a los 10 años pesará 120 kg.
> d) Si con 24 baldosones cubro un piso de 3 m por 2 m, con 48 baldosones cubro un piso de 6 m por 4 m.

Al discutir sobre cada una de las opciones, los niños descubrirán que hay situaciones en las que al doble le corresponde el doble, pero que en otras situaciones estas relaciones no se sostienen, ya sea porque, como en la opción c), no se puede saber el peso de Ema a los 10 años y no es razonable que una niña de esa edad tenga ese peso o porque, como en la opción d) duplicar el número de baldosas no alcanza para cubrir un patio si se duplican ambas variables, largo y ancho.
Las actividades en las que hay que cambiar la forma de representación de una relación de proporcionalidad, también aportan a la construcción de sentido[26]. Por ejemplo, se puede presentar la siguiente situación, en la que se incluyen algunas expresiones decimales en el contexto del dinero, que es conocido por los niños y que permite, eventualmente, operar con naturales expresando los precios en centavos.

> • Leé este texto y luego contestá a las preguntas.
> En el parque acaban de instalar camas elásticas para saltar. Un cartel dice: *$ 2 LOS 10 MINUTOS.* Patricia tiene solo $1, mira al boletero y con su mejor sonrisa le dice:
> *–¿Puedo pagarle $ 1 y saltar 5 minutos? Quiero practicar la vuelta carnero en el aire.*
> *–Está bien, nena –contesta el boletero–, hoy me agarraste bueno.*

[26] Tal como se plantea en el apartado “Para trabajar con la información”, en el Eje “Número y Operaciones” de este *Cuaderno*, también será posible pedirles a los alumnos, cuando sea conveniente, que armen un gráfico de barras a partir de la información de una tabla o bien un pictograma.

Al escuchar este diálogo, Carlos se anima y le dice:
–Yo sólo tengo 40 centavos, ¿puedo pagárselos y saltar el tiempo que me corresponde?
–Bueno, pero ni un segundo más, le responde el boletero.
Ambos se zambullen en las camas elásticas y comienzan a saltar.

a) ¿Durante cuánto tiempo pueden saltar juntos Patricia y Carlos?
b) Diseñá una tabla para pegar en la boletería, donde se muestre cuánto tiempo se puede saltar con 80 centavos, con $ 4, con $ 1,20 y con $ 3. Luego incluí lo que se tiene que cobrar si alguien quiere saltar 1 minuto, 45 minutos o una hora.

La tabla resultante construida a partir de operaciones del campo multiplicativo, vinculando medidas de tiempo y precios, es una representación de la relación que facilita la identificación de relaciones numéricas.

Precio en $	2	1	0,40	0,80	3	0,20	9	12
Tiempo en min	10	5	2	4	15	1	45	60

Los chicos podrán analizar, en todos los casos, que si se duplica el dinero, se duplica la cantidad de tiempo que se puede saltar; si se triplica el dinero, se triplica el tiempo, si se reduce el dinero a la mitad, se reduce el tiempo a la mitad, es decir que estas relaciones se dan entre las cantidades de las dos magnitudes y que pueden generalizarse en la siguiente afirmación: ***Si una cantidad se multiplica o se divide por un número, lo mismo ocurre con la cantidad correspondiente.*** De igual forma, si sumamos, por ejemplo, $ 2 y $ 1, tendremos un pago de $ 3, y si sumamos las cantidades correspondientes de la otra magnitud, 10 min y 5 min, obtenemos la cantidad correspondiente a $ 3 que son 15 min, lo que puede generalizarse en la afirmación: ***Si dos cantidades se suman entre sí, al resultado le corresponde la suma de las cantidades correspondientes.***

Si no surgiera espontáneamente, sería interesante preguntar *¿Esta última conclusión también vale para la resta de cantidades correspondientes?* Por ejemplo, para saber *cuánto pagaría si quisiera saltar sólo 8 minutos, ¿podría restar algunos datos de la tabla?* Observando la tabla, encontramos que 10 minutos cuestan $ 2 y que 2 minutos cuestan 40 centavos, por lo tanto restando entre ambas cantidades, obtenemos que para 8 minutos (10 – 2) corresponde pagar $ 1,60 (2 – 0,40). Una de las formas que nos permiten reconocer si este procedimiento es correcto, consiste en buscar el resultado usando la propiedad de la suma y elegir valores que sumados den 8 minutos (5 + 2 + 1).

Volviendo a la tabla, también es posible que los chicos descubran, y si así no lo hicieran lo podríamos señalar, que todos los valores de tiempo resultan de *multiplicar por 5 el valor que corresponde al dinero*. De esta manera, podrán comenzar a reflexionar, en el contexto, sobre la forma de encontrar el valor de una cantidad a partir de la otra. Será este el momento de volver sobre las relaciones no proporcionales ya analizadas para descubrir que *cuando las cantidades no se relacionan de forma directamente proporcional, no podemos multiplicar por un mismo número para calcular una cantidad a partir de otra.*

Para avanzar en las formas de calcular con números naturales

En los *Cuadernos* anteriores, venimos planteando que es necesario pensar la enseñanza del cálculo en dos sentidos. Por una parte, los problemas donde las operaciones adquieren distintos significados presentan una oportunidad para resolver cálculos exactos o aproximados según lo requiere la situación y, en ese caso, los cálculos aparecen como una "herramienta útil". Por otra parte, los cálculos también pueden ser "objetos de estudio" en sí mismos cuando consideramos los distintos procedimientos producidos por los mismos chicos u otros que podemos introducir, para compararlos y discutir si son o no válidos o si pueden simplificarse, justificando las decisiones que se tomen al respecto. En este apartado, nos ocuparemos del cálculo en este segundo sentido.

Cuando los chicos llegan a 5º año/grado, en general, han podido discutir la conveniencia de un procedimiento u otro según los números involucrados, es decir pensando cuál es el modo más conveniente de hacerlo, en lugar de proceder automáticamente con un algoritmo igual para todos los cálculos. Por ejemplo, si deben calcular 1000 + 50, 200 x 300 o 15.000 : 50, podrán obtener el resultado mentalmente, sin escribir una cuenta. También, habrán adquirido un repertorio memorizado de sumas, restas y multiplicaciones que les permitirán calcular con mayor seguridad.

Asimismo, al comparar distintos procedimientos de cálculo con los algoritmos usuales de suma, resta, y multiplicación por una y dos cifras, y el de división por una y dos cifras por aproximaciones sucesivas, habrán considerado cuáles son las propiedades de las operaciones que permiten justificar cada paso y cuáles son más económicos. Durante el Segundo Ciclo, los algoritmos van avanzando hacia formas cada vez más expertas y eficaces, siguiendo con un proceso de producción y análisis de distintos procedimientos originales de los mismos alumnos que, sin abandonar necesariamente los primeros, reconocen en estos últimos una posibilidad de agilizar las estrategias. En 5º año/grado deberán afianzar los conocimientos adquiridos:

- ampliando el repertorio de sumas y productos para calcular mentalmente,
- extendiendo a números un poco más grandes los algoritmos conocidos y controlando sus resultados mediante cálculos aproximados,
- comparando procedimientos, argumentando sobre su validez en base a sus conocimientos sobre las propiedades y la interpretación que hacen de los números y analizando argumentos de otros y
- explorando nuevas relaciones entre números y sistematizando otras conocidas.

Plantear situaciones para avanzar en el cálculo

En relación con la ampliación del repertorio de **cálculos memorizados**, es muy efectivo plantear situaciones de juego, pues éstas dan lugar a la aparición de relaciones matemáticas que luego pueden ser objeto de reflexión y sistematización. Por otra parte, si bien inicialmente jugar es un tipo de trabajo realizable en el aula, luego podrá formar parte de las tareas que los chicos desarrollarán fuera de la escuela, cuando el docente lo considere necesario.

Presentamos aquí un juego cuyo objetivo es la memorización de productos y cocientes de la tabla pitagórica que muchas veces aún no se ha logrado en este año.

> **“Descubrir la carta”:** cálculo mental de productos y cocientes.
> **Materiales:** un mazo de cartas españolas hasta el 10 por grupo y una hoja para anotar para cada chico.
> **Organización de la clase:** en grupos de tres integrantes, y uno de ellos será elegido juez rotativamente en cada mano.
> **Reglas del juego:** se reparten las cartas entre dos jugadores. Cada jugador tiene su pila de cartas boca abajo y no debe mirarlas. Los dos jugadores levantarán al mismo tiempo una carta de sus pilas y la mirarán sin mostrársela al compañero. Tendrán que recordar el número de la carta que sacaron. Luego se la entregarán al juez para que diga en voz alta el resultado de la multiplicación de ambas cartas.
> Con ese resultado, cada jugador deberá anotar el producto de su carta por la que crea que es la de su compañero. Por ejemplo, si su carta era un 8 y el producto es 72, deberá anotar 72 = 8 x 9. El tercer jugador mira ambos productos y le da un punto a cada participante que haya anotado bien.
> El juego continúa hasta que no queden más cartas. El juez podrá recurrir a la tabla pitagórica para resolver cualquier discusión.

Después de jugar, cada chico deberá marcar, en una tabla pitagórica individual, los productos que ya tenía memorizados y cuáles no para tener un registro de sus aprendizajes.

Por último, propondremos que discutan sobre las diferentes formas de obtener los productos aún no memorizados, apoyándose en otros conocidos[27]. En este trabajo habrá que analizar la conveniencia de pensar, por ejemplo 8 x 9 como *el doble de 4 x 9* o como *5 x 9 más 3 x 9*, en lugar de pensarlo como *la suma de 9 veces ocho u 8 veces nueve*.

Una segunda versión del juego podrá incluir algunos números de dos cifras en las cartas, con el propósito de avanzar en cálculos con los mismos. Para ello, será necesario incluir tarjetas en las que estén los números de 1 a 10, 25, 50, 20, 30, 40, 60 hasta 100.

En este caso, luego de jugar, se podrá discutir sobre cómo multiplicar números de una cifra por 10 y por 100, y cómo apoyarse en estos productos para pensar el x 20 como x 2 x 10; el x 30 como x 3 x 10, etc. Asimismo, se podrá pensar que x 50 es x 100 : 2 en todos los casos y que también es : 2 x 100, cuando el número es par, o que x 25 es x 100 : 4 y, en algunos casos, también es : 4 x 100, cuando el número es múltiplo de 4. Más adelante, al operar con decimales podrán establecerse otras relaciones como: multiplicar por 0,25 es equivalente a dividir por 4.

También se podrá discutir sobre cómo se multiplican dos números "redondos" de dos o más cifras entre sí, por ejemplo 200 x 40, al pensarlos como 2 x 100 y 4 x 10, analizando luego si la regla que se obtiene puede extenderse para números redondos de más cifras. Es interesante destacar que tanto la descomposición en factores como el uso de las propiedades conmutativa y asociativa de la multiplicación resultan significativas para los alumnos cuando descubren que pueden usarlas para transformar una cuenta que podría parecer difícil en un cálculo un poco más largo, pero que resulta más fácil, como por ejemplo:
480 x 250 = 6 x 4 x 2 x 10 x 25 x 10 = 25 x 4 x 100 x 6 x 2 = 120.000

Otros juegos dan lugar a la utilización de cálculos con las cuatro operaciones. Por ejemplo:

"Lo más cerca posible": cálculo mental combinando operaciones.
Materiales: un mazo de 27 tarjetas con los números 100, 200 hasta 900, 10, 20 hasta 90 y 1, 2, hasta 9. Fichas o piedritas para anotar el puntaje.
Organización de la clase: se juega de a cuatro jugadores.
Desarrollo: en este juego hay que llegar hasta 100, haciendo operaciones con los números de 4 cartas del mazo.

[27] **Recomendación de lectura:** en los *Cuadernos para el aula: Matemática 3* y *4*, y en el apartado "Plantear situaciones para sistematizar relaciones numéricas y propiedades de las operaciones", en el Eje "Número y Operaciones" de este *Cuaderno* se pueden consultar actividades cuyo propósito es promover estas reflexiones.

Se mezclan las tarjetas y se colocan en una pila boca abajo. Un jugador saca las cuatro primeras y las coloca boca arriba, en el centro, para que todos las vean. La carta con el número mayor se aparta. Luego, cada uno escribe un cálculo con los otros tres números cuyo resultado sea lo más cercano posible al número de la carta apartada. Gana 2 puntos aquel que obtiene el resultado más cercano; si hay más de uno con el mismo, cada uno de ellos obtiene un punto.
En otro momento, se podrá jugar de modo que el resultado que haya que obtener sea el número menor.

Esta actividad favorece el uso de cálculos mentales aproximados antes de hacer el cálculo exacto para controlar su resultado, o para tomar la decisión de no hacerlos, y permite discutir luego sobre cómo se modifica el resultado al cambiar el orden de las operaciones. Las argumentaciones que se utilicen darán cuenta de la disponibilidad de las propiedades de las operaciones que los chicos hayan adquirido.

Como actividad posterior, se podrá analizar una partida simulada, por ejemplo como la siguiente:

• Los cálculos siguientes los escribió Matías cuando jugaba a “Lo más cerca posible” y habían salido las tarjetas: 200, 50, 3, y 70

50 x 3 + 70 70 x 3 - 50 (50 + 70) x 3 50 x 70 : 3

a) Sin hacer los cálculos, decidí qué cálculo está más lejos del resultado.
b) ¿Qué cálculo gana?
c) Matías dice que *cincuenta por tres más setenta* es 220 y Ayelén dice que da 3650. ¿Cómo pensó cada uno?

Un ejemplo de la utilidad de hacer cálculos aproximados para decidir sobre si hacer o no el cálculo exacto, es anticipar que el resultado de 50 x 70 va a tener 4 cifras y “está muy lejos” de 200.

Otro modo de promover el **cálculo mental** es plantear situaciones en las que haya que buscar números que cumplan con ciertas condiciones vinculadas con operaciones, como en los casos siguientes:

1. Encontrá todas las maneras posibles de obtener 200, multiplicando dos números naturales.

2. Encontrá tres maneras posibles de obtener 200, multiplicando más de dos números naturales.

3. Encontrá tres maneras posibles de obtener 200 como resultado, utilizando sumas y multiplicaciones de números naturales.

4. Encontrá tres maneras posibles de obtener 200 como cociente, utilizando una división.

Para responder a la consigna 1, algunos niños buscan por tanteo pares de números que den 200, otros niños descomponen en factores de una cifra y luego los van combinando; mientras que otros van recorriendo el 1, el 2, el 3, el 4 y prueban si es posible encontrar el otro factor. Así, los niños podrán encontrar, entre otros:

4 x 5 x 2 x 5   1 x 200   2 x 100   4 x 50   5 x 40

40 x 5   4 x 50   8 x 25   10 x 20

En este camino, surgirán cuestiones para discutir, por ejemplo: *¿Se aceptará 1 x 200?, ¿son dos formas diferentes 2 x 100 y 100 x 2?*

La consigna 2 avanza hacia descomposiciones multiplicativas, donde podremos evaluar el aprovechamiento que se haga de las relaciones que quedaron disponibles de las del primero. En la discusión común, podremos preguntar *Si se descompone el 200 en 10 x 20, ¿se puede escribir 2 x 5 x 4 x 5 y también 2 x 5 x 2 x x 2 x 5? Si se hace lo mismo con 8 x 25, ¿se obtienen los mismos factores? ¿Por qué?* En la consigna 3, si los niños emplean simultáneamente multiplicaciones y sumas, podrá surgir el uso del paréntesis para indicar el orden en que se realizan. Finalmente, en la consigna 4, se podrá poner en evidencia que a partir de una cuenta de dividir que dé 200 como cociente y con resto 0 basta multiplicar dividendo y divisor por un mismo número para obtener otra que también da ese cociente.

Plantear situaciones para multiplicar y dividir por dos cifras

En 5º año/grado, las sumas y las restas con números naturales resultan cálculos suficientemente conocidos como para no dedicar un tiempo específico a su revisión, salvo en lo que se refiere al cálculo aproximado, al controlar los resultados. Sin embargo, todavía suele ser necesario retomar conocimientos sobre la multiplicación y la división por dos cifras para profundizarlos.

Al llegar a 5º año/grado los chicos ya han conocido diferentes formas de multiplicar un número natural por otro y han arribado a la conveniencia de usar el **algoritmo convencional** cuando no es sencillo operar mentalmente. Sin embargo, resulta un desafío extender los procedimientos conocidos para calcular productos de números más grandes y debatir sobre los conocimientos en los cuales se apoyan.

Las actividades que siguen toman los procedimientos como objeto de análisis para compararlos y explicitar las relaciones establecidas, a la vez que exigen la formulación de argumentos sobre su validez.

• Respondé a las siguientes preguntas sin hacer las cuentas.
a) Para resolver la cuenta 164 x 12, Nacho multiplicó 164 x 4 y 164 x 8 y luego sumó los resultados. Explicá cómo lo pensó.
b) Guille pensó el 12 como (10 + 2) y usó el mismo procedimiento que Nacho. ¿Cuál de las dos formas usarías? ¿Por qué?
c) Para resolver el mismo cálculo, Gaby hizo 164 x 3 x 2 x 2, porque ella dice que le resulta fácil calcular dobles. ¿Te parece que su procedimiento está bien?

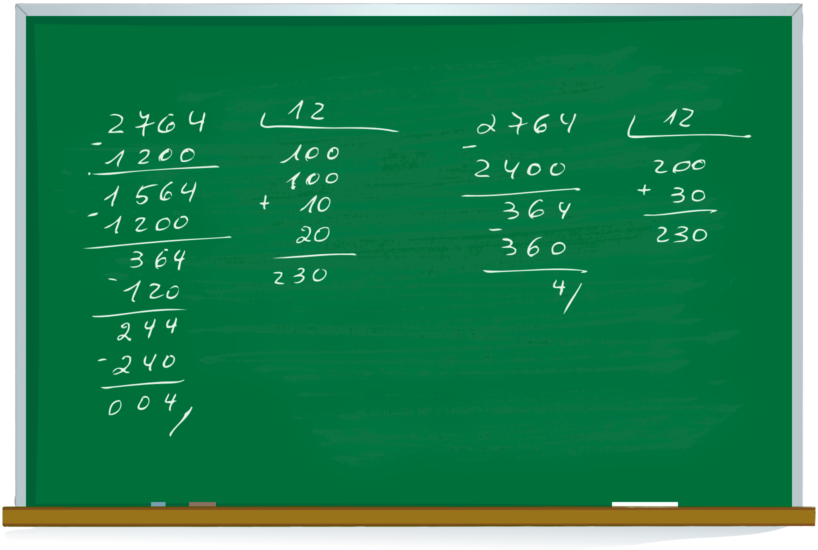
• Tres chicos pensaron el cálculo 420 x 39 de las siguientes formas:
420 x 40 – 420
420 x 13 x 3
42 x 4 x 100 – 420
Sin hacer los cálculos, respondé:
a) ¿Se obtiene el mismo resultado en los tres casos?
b) ¿Cómo lo pensó cada uno?
c) ¿Qué propiedad permite a cada uno plantear el cálculo de esa forma?

Estas actividades permiten discutir cómo las propiedades de la multiplicación justifican los procedimientos de cálculo. Por ejemplo, en el debate de las respuestas elaboradas por los chicos sobre la actividad 1, en el ítem a) podrán aparecer formulaciones como *Nacho pensó en que hacer doce veces un número es lo mismo que hacer ese número cuatro veces y después ocho veces y sumar.* En el ítem b), podrán pensar que de las dos descomposiciones aditivas de 12 conviene la que hizo Guille, porque para multiplicar por 10 se agrega un cero. En ambos casos, los chicos usaron la propiedad distributiva. En cuanto a la forma de calcular de Gaby, ella se apoyó en la idea de que 12 se puede descomponer en factores y después asociarlos como resulte más fácil.

En cuanto a la **división de un número por otro de dos cifras**, en 4º año/grado hemos propuesto avanzar hacia el algoritmo basado en aproximaciones sucesivas al cociente, por lo que, ya en 5º año/grado, este algoritmo debiera estar disponible para todos los alumnos, incluyendo una versión lo más sintética posible.

Por ejemplo, si se trata de dividir 2764 : 12, el cociente será mayor que 100 y menor que 1000, pues 12 x 100 = 1200 y 12 x 1000 = 12000, por lo que será un número de 3 cifras.

¿Cómo se podría ir pensando la cuenta? Veamos dos versiones, una larga y otra más corta.



Tal como hemos planteado en el *Cuadernos para el aula: Matemática 4*, si los chicos se apoyan en el trabajo de cálculo mental y aproximado que vienen realizando, es fácil para ellos pensar en multiplicar el divisor por la unidad seguida de ceros e ir restando los resultados. Para acortar la cuenta, se podrá pedir a los alumnos que anticipen el resultado de la resta antes de realizarla efectivamente, con el fin de determinar si es posible aumentar el cociente *para que sobre lo menos posible*. Esta estrategia va reduciendo el número de restas escritas. Es posible que algunos niños puedan hacer estas restas mentalmente; sin embargo, para otros, esto les hace perder el control sobre el procedimiento. En este sentido, y dado que priorizamos este control, no conviene insistir en abandonar la resta buscando una rapidez que no resulta significativa.

Es importante señalar que no es necesario que todos los chicos hagan la cuenta del mismo modo. Si, al llegar a 5º año/grado, algunos niños han aprendido el algoritmo tradicional en el que se separa el dividendo en cifras, se multiplica y resta mentalmente y “se baja” una nueva cifra, tendremos que trabajar con ellos para conocer si tienen control de los pasos que hacen y, si no es así, colaboraremos para que comparen su forma de resolver con otras e incluyan todas las escrituras auxiliares que necesiten.

Otras actividades que resultan muy importantes para afianzar las habilidades de cálculo son aquellas que requieren realizar **cálculos aproximados con números más grandes**, pues permiten controlar los resultados que se obtienen al hacerlos en forma exacta.

1. Marcá el resultado correcto sin hacer la cuenta.

375 x 23 =	6625	8625	10625
2581 x 19 =	49039	28039	61039

2. Encuadrá el resultado de cada cuenta. ¿Cómo lo pensaste?

5 x 22	entre 100 y 1000	entre 1000 y 10000	entre 10 y 100
49 x 51	entre 100 y 2000	entre 2000 y 3000	entre 3000 y 4000

3. Colocá un número, para que el producto resulte entre los números indicados.

19 x …	está entre 350 y 400
31 x …	está entre 3500 y 4000

4. Marcá el resultado correcto sin hacer la cuenta.

6890 : 32 =	215	315	415
7008 : 24 =	29	292	2902

La justificación de la selección del resultado llevará a los alumnos a formular argumentos vinculados con la cantidad de cifras que puede tener el cociente, la cifra que ocupa el lugar de las unidades, etc.

En otras actividades, es necesario reflexionar acerca de las relaciones entre multiplicación y división, y entre el resultado de una división y la descomposición en factores del dividendo y el divisor. Por ejemplo:

Sin resolver las cuentas de dividir, sabiendo que 120 x 50 = 6000, calculá:

a) 6000 : 50 =	6000 : 120 =	6120 : 120 =	5950 : 50 =
b) 6000 : 25 =	6000 : 12 =	6000 : 40 =	

En el caso a), los dos primeros cálculos llevan a pensar a cada uno de los factores como divisores y los dos últimos a considerar cómo cambia el cociente cuando el dividendo aumenta o disminuye en relación con esos factores. En el caso b), descomponer 120 y 50 en factores permite combinarlos para obtener los resultados sin dividir. Por ejemplo, como 50 es 25 x 2, el resultado de 6000 : 25 es 120 x 2 y, además, como 120 es 12 x 10, el resultado de 6000 : 12 es 50 x 10. Recuperar distintas formas de descomponer un número en factores es una estrategia que da lugar a pensar diferentes divisiones. Así, 6000 = 40 x 3 x 5 x 10, entonces se puede calcular sin dividir el resultado de 6000 : 40, de 6000 : 3, de 6000 : 5 y de 6000 : 10, asociando los otros factores.

Plantear situaciones para sistematizar relaciones numéricas y propiedades de las operaciones

En este apartado, nos ocuparemos de presentar actividades de sistematización de conocimientos numéricos ya explorados en las actividades de cálculo mental y en la producción y análisis de procedimientos de cálculo.

Ya desde *Cuadernos para el aula: Matemática 3* se propone un trabajo de comparación de tablas de multiplicar en la tabla pitagórica, mientras que en *Cuadernos para el aula: Matemática 4* se presenta la extensión de algunas relaciones fuera de la tabla. Podemos retomar este trabajo en 5º año/grado, proponiendo actividades en las que se presenten afirmaciones para decidir sobre su validez.

Por ejemplo, en la primera versión del juego "Descubrir la carta", en este *Cuaderno*, se plantean diferentes formas de pensar 8 x 9 y, en la segunda versión, se plantea cómo apoyarse en los productos x 10 y x 100, para pensar los productos x 25, y x 20, x 30, x 40, hasta x 90. Para que los chicos puedan discutir estas reglas y las propiedades en las que se apoyan, podremos proponer actividades como las siguientes.

1. a) ¿Con cuáles de las siguientes afirmaciones estás de acuerdo? ¿Por qué?
8 x 9 es el doble de 4 x 9.
8 x 9 es 5 x 9 más 3 x 9.
8 x 9 es el doble del doble del doble de 9.
8 x 9 es el triple del triple de 8.
8 x 9 es lo mismo que 9 x 8.
8 x 9 es 3 veces 8 más 6 veces 8.
b) Escribí con un cálculo las afirmaciones con las que estés de acuerdo.

2. Encontrá, si es posible, algún ejemplo donde la regla se cumpla y otro donde la regla no se cumpla.
a) Para multiplicar un número por 5 se le agrega un cero y al resultado se lo divide por dos.
b) Para multiplicar un número por 5 se halla la mitad y se multiplica por 10.

3. Para multiplicar un número por 5, ¿vale alguna de estas reglas?
Doblar y añadir el doble,
añadir el doble del doble,
añadir el doble y doblar.

4. ¿Es verdad que para multiplicar un número por 99, se añaden dos ceros y se le resta el número? ¿Por qué?

5. Para hacer 7650 : 25:
Jimena hace 7500 : 25 = 300 y 150 : 25 = 6 y después suma 300 + 6.
María, en cambio, hace 7650 : 10, después 7650 : 10 y 7650 : 5, y después suma.
¿Está bien lo que hace Jimena? ¿Y lo que hace María? ¿Por qué?

6. Ale dice que si 6 x 5 = 5 x 6, entonces 450 x 392 = 392 X 450, ¿estás de acuerdo?, ¿por qué?

7. Guille dice que para resolver 36 x 150, hace 30 x 150 y 6 x150 y suma los resultados.
Gaby dice que ella hace 36 x 100 y 36 x 50, y después suma los resultados. ¿Está bien lo que hace Guille?, ¿y lo que hace Gaby?, ¿por qué?

Al analizar las reglas, es importante considerar que algunas valen para todos los números (para multiplicar un número por 5 se le agrega un cero y al resultado se lo divide por dos pues 5 = 10/2), otras sólo en algunos casos (para multiplicar un número por 5 se halla la mitad y se multiplica por 10, que vale solo para los números pares) y otras nunca (para multiplicar un número por 5, no vale doblar y añadir el doble porque se obtendría el número por 4). Asimismo, habrá que explicitar de qué modo se utilizan las propiedades asociativa, conmutativa y distributiva en los distintos casos.

Plantear situaciones para analizar las relaciones de múltiplo y divisor

Las relaciones de múltiplo y divisor, inversas entre sí, vinculan pares de números y pueden ser enunciadas del siguiente modo: *Si un número* d *se multiplica por un número natural, se obtiene otro número* m*, que es múltiplo de* d*. A la vez,* d *divide exactamente a* m *y es un divisor del mismo. Por ejemplo, 2 multiplicado por 3 es 6, entonces es posible decir que 2 es divisor de 6 y 6 es múltiplo de 2, y también que 3 es divisor de 6 y 6 es múltiplo de 3.*

En 5º año/grado se avanzará en el reconocimiento de estas relaciones, teniendo en cuenta que es importante no avanzar en la comunicación de las reglas, como los criterios de divisibilidad o el procedimiento para el cálculo de múltiplos y divisores comunes basado en la descomposición en factores primos, si los chicos no pueden dar cuenta de las razones en las que esas reglas se apoyan.

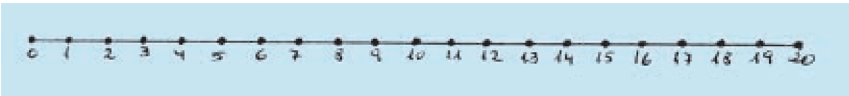
Cuando presentamos enunciados de problemas vinculados con el uso de múltiplos y/o divisores, es importante que tengamos presente que, para resolverlos, hay que utilizar un repertorio multiplicativo importante. Si bien estos problemas contribuyen a memorizar las series de múltiplos, las posibilidades de abordar las nuevas nociones en juego mejoran si los alumnos ya tienen disponible el repertorio multiplicativo que se fue instalando desde años anteriores.

Los niños ya conocen algunos múltiplos de algunos números, como *los números de las tablas,* y apoyándose en este conocimiento es posible extenderlo y avanzar en la noción de múltiplo común. Consideremos la siguiente secuencia de actividades que permite explorar esta relación y luego sistematizarla al reflexionar sobre las formas de jugar.

Secuencia para analizar las relaciones de múltiplo y divisor: "Saltos y múltiplos"

La presente secuencia tiene como propósito dar lugar a la identificación de múltiplos. Se puede jugar con diferentes versiones[28], pero aquí hemos tomado solo dos.

Actividad 1
"La pulga y las trampas": búsqueda de múltiplos comunes.
Materiales: para cada equipo, se necesita una tira de papel o cartulina con números hasta el 20, los espacios entre números deberán ser aproximadamente de cuatro centímetros, una bolsa con aproximadamente 20 chapitas para cada equipo y una piedrita con la que pondrán la trampa.



Organización de la clase: en grupos de 4, en cada grupo dos equipos de dos chicos.
Desarrollo: anunciaremos que la pulga va a saltar sobre la tira con saltos iguales de 2 en 2 o de 3 en 3. Luego, sobre un número de la tira, uno de los equipos coloca una "trampa". El otro equipo, comenzando desde cero, elige con qué salto recorrer la tira y hace avanzar la "pulga" con los saltos del tamaño que haya escogido, procurando no caer en las trampas. Si cae en la trampa, no puede seguir. Si logra atravesar toda la tira sin caer en la trampa, se queda con su chapita; si no, se queda con ella el equipo que puso la trampa.

[28] **Recomendación de lectura:** Fuenlabrada, I. y otros (2000), *Juega y aprende matemática*, Buenos Aires, Novedades Educativas.

> Luego, se alternan los roles de los equipos y juegan un número par de veces, para que ambos equipos tengan la misma oportunidad de obtener chapitas. Gana el equipo que se queda con más chapitas.

La estrategia del colocador de trampas consistirá, en todos los casos, en buscar números que bloqueen totalmente el camino en algún momento para ganar las chapitas. Para esto, los niños deberán, poco a poco, desarrollar estrategias de cálculo mental para buscar números que estén contenidos en varias series a la vez.

> **Actividad 2**
> Cada equipo debe escribir cómo piensa al poner la trampa para ganar y por qué le parece que funciona. Luego, se leen las estrategias para que quede claro para todos cómo lo pensó cada equipo.

En este caso, la explicitación de la estrategia da lugar a reconocer y nombrar los conocimientos utilizados.

Actividad 3
Otros problemas interesantes para volver a utilizar los conocimientos elaborados son los siguientes:

> 1. Fijate dónde ponen la trampa estos chicos y respondé para cada uno: ¿te parece que es un buen lugar para la trampa? ¿Por qué?
> a) Matías puso la trampa en el 7. b) Lucía puso en el 10.
> c) Martina puso en el 18. d) Malena puso en el 15.
>
> 2. Hacé una lista de los números hasta 20:
> a) que sean los mejores para poner la trampa,
> b) que sean los peores para poner la trampa.
>
> 3. Si la tira de números fuera hasta el 30:
> a) ¿qué números de la tira convienen más?
> b) ¿cuáles no convienen?

Actividad 4
Propondremos jugar nuevamente, enfrentando equipos de dos chicos pero con algunos datos cambiados. La tira es hasta el 30, se ponen dos trampas, el salto puede ser de 2 en 2, o de 3 en 3, o de 4 en 4, o de 5 en 5.

El cambio de reglas enriquece mucho las posibilidades de múltiplos comunes, pues al haber dos trampas, permite tomar las series de múltiplos de a dos. Por ejemplo, una trampa para los múltiplos comunes a 2 y 3, y otra para los comunes a 4 y 5, o también para los múltiplos comunes a 4 y 3, y otra para los comunes a 2 y 5. Otra opción es considerar una trampa para tres series y otra para una, por ejemplo 2, 4 y 3, y otra para 5, o también una para 2, 3 y 5, y otra para 4.

Actividad 5

Se pide nuevamente que escriban la estrategia ganadora y por qué creen que funciona. En este caso, como hemos planteado recién, se dan varias posibilidades.

Esta versión también permite discutir que algunas series de múltiplos están incluidas en otras, pues se da el caso de que ***la serie del 4 (los múltiplos de 4) está incluida en la serie del 2 (son también múltiplos de 2)***, y discutir también si la inversa es cierta, es decir, ***si los múltiplos de 2 son (todos) múltiplos de 4.***

Asimismo, se podría discutir qué largo debería tener la tira para que se pudiera poner una única trampa que atrapara a la pulga con cualquiera de los cuatro saltos posibles, es decir cuál sería el mínimo común múltiplo de los números 2, 3, 4 y 5.

Otra discusión puede darse acerca de una nueva regla "hay que salvar a la pulga". En este caso, habrá que determinar si es posible poner la trampa en algún número, de modo que ninguna pulga caiga en ella. La reflexión en este último caso podría llevar a identificar los números primos.

Actividad 6

Nuevamente, se pueden proponer problemas interesantes para volver a utilizar los conocimientos elaborados. Por ejemplo:

- Si la tira se extiende, y la pulga salta de a 2, de a 3, de a 4 o de a 5:
  a) ¿cae en el 123? ¿Por qué? b) ¿cae en el 137? ¿Por qué?

- Si se sabe que cayó en el 122, ¿se puede saber de a cuánto saltaba?

Siguiendo con el mismo esquema de juego, podremos ir aumentando el número de trampas a 3 y los saltos hasta de 7 espacios, o bien aumentar a 4 trampas y los saltos de hasta 9 espacios. Por supuesto la tira deberá ser, al menos, de 40 o 50 números respectivamente.

En un grupo de plurigrado, es posible realizar el juego inicial en conjunto y luego organizar actividades diferentes para grupos con distintos conocimientos. En un caso, se podría focalizar la actividad solo en la idea de múltiplo, en otros en la idea de múltiplo común, en otros sobre primos y compuestos y, para los más avanzados, se podrían plantear problemas en los que la pulga salta desde una partida distinta de 0. En este último caso, se puede avanzar en la explicitación de la relación $D = d \times c + r$, ya que el resto sería el punto de partida.

Si bien en 5º año/grado no se aborda el análisis de criterios de divisibilidad, pues su justificación no está al alcance de los alumnos, es posible comparar pares de números y decidir si uno divide a otro en forma exacta o no. Por ejemplo, en el caso de la siguiente actividad que podemos presentar a los niños por grupos o individualmente, y en la que hay que descubrir la regla de un juego.

- Dos niñas, Cecilia y Rosa, encontraron en un cajón un mazo de naipes sin el 11 y el 12, e inventaron un juego nuevo con ese mazo, que se llama "Da justo". Les preguntamos cuáles eran las reglas y no quisieron revelarlo. Pero observemos cómo jugaron: luego de barajar, cada una tomó tres cartas que fue colocando alternativamente sobre la mesa. Anotaron las jugadas subrayando la carta ganadora en cada una. Si era empate no se subrayó nada. ¿Cómo deciden cuál es la carta ganadora?

Ceci	Rosa	Ceci	Rosa	Ceci	Rosa	Ceci	Rosa	Ceci	Rosa
2	4	**1**	2	**2**	8	**2**	4	**3**	6
5	8	**5**	10	7	**1**	5	8	4	**2**
3	**1**	3	2	6	**3**	3	**1**	8	7

La interpretación que hagan los chicos de la información en las tablas dependerá de sus experiencias a propósito del análisis de relaciones entre números dando lugar a distintas conclusiones, como: *el que tiene la carta más baja gana* o *conviene sacar el 2 porque gana casi siempre o bien el que conviene sacar es el 1, que gana siempre.*

El siguiente es un fragmento de una clase donde se indagan las reglas del juego.

Registro de clase

Maestra: –*¿Hay alguna manera de saber cuál es el número que gana en cada tirada?*
David: –*Siempre es el más chico.*
Maestra: –*Entonces, ¿por qué no le ganó el 2 al 3, o el 4 al 9…?*
David: –*Pero le ganó el 2 al 4, el 5 al 10… Porque no es "un más chico cualquiera", son más chicos que si los vas sumando llegan al otro número, justo.*
Maestra: –*¿Alguien entiende lo que dice David?*
Ana: –*Seguro, mirá: si sumás 2 + 2 + 2, llegás a 6 justo. Si sumás 5 más 5, te da 10 justo…*
Maestra: –*¿Y esto vale en todos las jugadas? ¿Por qué no lo verifican?*
Varios: –*¡Sí! ¡Vale siempre!*

Maestra: –*Entonces, si juego con Lucas, y yo saco el 8* (levanta una carta con este número) *y Lucas saca el 3* (entrega una carta con este número a Lucas), *¿quién de los dos gana?*
Lucas: –*Nadie, porque tres veces 3 se pasa de 8.*
Maestra: –*Entonces, ¿qué carta le conviene tener a Lucas para ganarme?*
Ana: –*Puede tener el 2.*
Andrés: –*O el 4 también. O el 8…* (duda).
David: –*Sí, te da justo una vez. Puede tener el 1, ¡y si tiene el 1 siempre gana! Porque 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1… te da lo que quieras…*
Maestra: –*Esos números que nombraron, el 1, el 2, el 4 y el 8 son los que "dividen justo" al 8. Se llaman* divisores del 8*. Y si tengo el 3, ¿a qué cartas le gano?*
Aníbal: –*Al 6,… al 9.*
Maestra: –*¿A alguno más?*
Matías: –*Al 3 y… ninguno más.*
Maestra: –*Entonces, si queremos escribir las reglas del juego, ¿qué ponemos? Escríbalo cada uno primero y después nos ponemos de acuerdo entre todos.*
Leonardo: (Lee.) –*En este juego se tiran las cartas que te tocan y ganás si tenés el número que entra justo en la carta del otro.*
Maestra: –*¿Qué dicen? ¿Se entiende?*
(Todos asienten.)
Maestra: –*¿Alguno escribió otra cosa?*
Débora: –*Yo puse:* Tenés que buscar si llegás justo al número que tiene el otro y entonces ganás.
Maestra: –*¿Qué quiere decir que* llegás justo*?*
Débora: –*Que mirás las cartas y si te da justo, ganaste.*
Maestra: –*¿Qué cosa te da justo?*
Débora: –*La suma… o la multiplicación.*
Maestra: –*¿Y cómo se podría decir usando la idea de divisor?*
David: –*Digo:* gano*, si tengo un divisor del otro.*
(A continuación, la maestra les entrega un mazo de naipes completo, con cartas hasta el 12 y les solicita que hagan una lista de cuáles son los números a los que les ganan el 1, el 2, el 3, el 4, el 5… etc., hasta el 12. Y luego dice:) –*Cada lista tiene los divisores de cada número, ¿por qué? Porque un número es divisor de otro si lo divide exactamente.*
Finalmente, se da este diálogo.
Maestra: –*¿Dónde podemos buscar divisores de un número?*
David: –*En la cabeza.* (Todos se ríen.)
Maestra: –*¿Y si reviso entre las tablas de multiplicar?*

Es interesante observar cómo los niños, en este registro de clase, apelan inicialmente al campo aditivo para justificar sus dichos, en este caso a la suma repetida, que dio sentido inicialmente a la multiplicación de números naturales. Luego, utilizan la idea de división exacta y la maestra propone el lenguaje matemático que expresa la idea que se está elaborando. Si un número “entra justo” en otro, es un divisor del otro número.

Luego de jugar, se pueden plantear preguntas sobre situaciones hipotéticas relacionadas con el juego, como las siguientes.

• Si se agregan cartas hasta el 50:
a) ¿a qué números les gana el 5? ¿Y el 2?
b) ¿Qué cartas les ganarían a los siguientes números?
27 17 35 40

• Si el mazo tiene 10 cartas, 10, 20, 30 hasta el 100:
a) escribí dos empates posibles.
b) ¿Hay algún número con el que se gana siempre?

Si bien no se espera que los alumnos enuncien los criterios de divisibilidad como tales, la reflexión sobre las respuestas a estas preguntas podría dar lugar a conclusiones como: *en el juego del 50, todos los pares se pueden dividir por 2* o bien, *todos los que terminan en 0 se pueden dividir por 10.*

Para operar con fracciones y decimales al resolver problemas

Desde la perspectiva que asocia el aprendizaje con la construcción del sentido de los conocimientos, para las operaciones con estos “nuevos” números, interesa ocuparse de:
- los problemas que se resuelven o que se relacionan con ellas,
- las situaciones en las que no pueden ser utilizadas,
- la evolución de las distintas concepciones de la operación que permita utilizarla en los distintos campos numéricos,
- sus relaciones con otros conceptos (multiplicación y división con proporcionalidad, por ejemplo),
- sus relaciones con otras operaciones,
- los recursos de cálculo que pueden ser utilizados, en donde el algoritmo es uno entre otros posibles,
- por qué funcionan tales recursos de cálculo,
- cuáles son los mecanismos de control que se poseen y que permiten validar el procedimiento realizado o la adecuación de la respuesta, etc.[29]

---

[29] Saiz, I. (1999), *Hacer matemática 2*, Libro para el docente, Buenos Aires, Estrada.

Estamos hablando aquí de algo mucho más complejo que agregar un contexto a una suma de fracciones o incorporar un listado de problemas al final del desarrollo de un tema que "muestre" dónde se usa un algoritmo, estrategias de enseñanza que se apoyan en la idea ya superada de que mirando y practicando se aprende. En los dos apartados que siguen, nos ocuparemos de dar ejemplos de actividades pensadas específicamente con el objetivo de propiciar en los alumnos un tipo de aprendizaje como el que se describe en la cita anterior.

Los procedimientos que se utilizan en "Para operar con fracciones y decimales al resolver problemas", se recuperan en las actividades propuestas en "Para calcular de diferentes formas con fracciones y decimales". Por ejemplo, los ejercicios de cálculo pensado brindan la oportunidad de hacer evolucionar y mejorar los procedimientos utilizados inicialmente por los alumnos y, a la vez, abren la posibilidad de aumentar la complejidad en los problemas.

En particular, en el apartado "Plantear situaciones para operar con fracciones y decimales con distintos significados" nos ocuparemos de presentar situaciones que requieran un uso posible de los números racionales para que los alumnos puedan resolverlos con herramientas propias. Nos parece fundamental, además, proponer aquí un trabajo de análisis y reflexión a partir de la comparación de situaciones problemáticas que involucran distintas operaciones y sus diferentes significados con el objeto de permitir el estudio de los límites de utilización de cada una de las operaciones. Para ello, el contexto de la proporcionalidad, por su relación con otros conceptos matemáticos, proporciona un ámbito ideal para iniciar el estudio de la multiplicación y división de fracciones, a la vez que se desarrollan estrategias de cálculo relacionadas con dichas operaciones. Por este motivo, los dos subtítulos incluidos en este apartado están íntimamente relacionados, ya que si bien el modelo de proporcionalidad es lo suficientemente complejo como para requerir que nos ocupemos especialmente de sus propiedades y características definitorias, es nuestra opción utilizar ese estudio como recurso que permita a su vez resignificar y ampliar el uso de las fracciones. En síntesis, lo que planteamos aquí es la necesidad de proponer problemas que permitan a los alumnos ir comprendiendo el tipo de situaciones para las que son útiles las operaciones.

Por otra parte, en el apartado "Para calcular de diferentes formas con fracciones y decimales" la resolución de los problemas da lugar a la elaboración de estrategias de cálculo que será necesario hacer evolucionar a través de actividades de cálculo mental como las que se proponen hasta llegar, más adelante, a la sistematización de una técnica general, el algoritmo. En este sentido, el inicio del trabajo con operaciones se plantea uno o dos años antes de la introducción del algoritmo. En particular, en este año no se priorizan los algoritmos de las operaciones, sino que se recuperan, se profundizan y se sistematizan otros recursos de cálculo más pensados, y se sigue profundizando en el sentido de las operaciones, analizando las diferentes situaciones en que pueden utilizarse y en las que no es posible hacerlo. En *Cuadernos para el aula: Matemática 4*, en el apartado análogo, se proponen problemas en los que los alumnos pueden poner en uso la idea que tienen de las fracciones y los decimales para encontrar resultados de sumas y restas con recursos propios[30]. El trabajo en 5° año/grado incorpora un nuevo repertorio de números además de los más usuales y familiares y problemas donde puedan usar las estrategias para sumar y restar que venían construyendo desde el año anterior, en relación con la multiplicación y división de racionales por un número natural.

Plantear situaciones para operar con cantidades expresadas en fracciones o decimales con distintos significados

El planteo de nuevos problemas que requieran utilizar las operaciones permitirá a los alumnos resignificarlas en el nuevo campo numérico.

Si bien más adelante nos ocuparemos más exhaustivamente de las situaciones de **proporcionalidad directa**, los problemas asociados a estas relaciones son particularmente interesantes para avanzar en el trabajo con la multiplicación y la división. A la vez, brindan una nueva oportunidad para realizar **sumas y restas**.

- En la heladería de Rocío, necesitan 5 kg de frutillas para hacer helado. El martes habían quedado del día anterior 7 bandejas de $\frac{3}{4}$ kg. ¿Es suficiente con lo que tienen o deberán comprar más frutillas?

- Ramiro fue al kiosco, sacó 8 fotocopias que costaban $ 0,07 cada una y compró 3 barritas de cereal de $1,20 y 5 bocaditos de $ 0,35. ¿Cuánto gastó?

---

[30] **Recomendación de lectura:** en "Para calcular de diferentes formas con fracciones decimales" de *Cuadernos para el aula: Matemática 4*, se hace referencia al tipo de procedimientos al que aludimos.

En estos casos, es posible resolver apoyándose en la suma y retomar un significado de la multiplicación con el que los alumnos ya están familiarizados para ir construyendo los primeros procedimientos de cálculo de dobles o mitades, triples, etc. A continuación, mostramos algunos procedimientos que utilizan los alumnos y que, por supuesto, dependen de los conocimientos con los que cuentan.

Erika

$\frac{3}{4} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$

$\frac{3}{4} + \frac{3}{4} = 1\frac{1}{2}$

$\frac{3}{4} + \frac{3}{4} = 1\frac{1}{2}$

$\frac{3}{4} + \frac{3}{4} = 1\frac{1}{2}$

3 y $1\frac{1}{2}$

Y si agrego otro $\frac{3}{4}$ es $5\frac{1}{4}$

Yanina

$\frac{3}{4}$ es 3 veces $\frac{1}{4}$,
así que 7 de $\frac{3}{4}$ es
como 21 veces $\frac{1}{4}$
$\frac{21}{4}$ que es 5 y $\frac{1}{4}$

Javier

35 centavos × 5 = 175 centavos = \$1,75

7 centavos × 8 = 56 centavos

3 × \$1,20 son \$3 y 60 centavos

$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 1\ \ 1}\\ 1,75 \\ 0,56 \\ 3,60 \\ \hline 5,91 \end{array}$$

Analizar las producciones y vincular el sentido del problema con los resultados obtenidos permitiría obtener algunas primeras reglas ligadas a la descomposición de fracciones a/b como a x 1/b o a la consideración de las denominaciones de las cifras decimales.

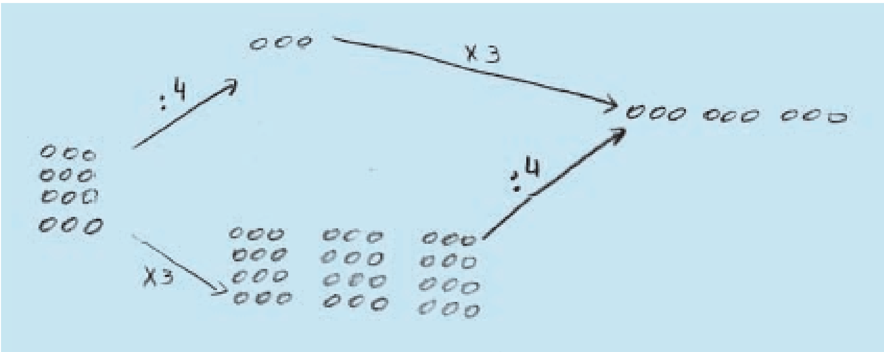
7 x 3/4 = 7 x 3 x 1/4 = 21 x 1/4

5 x 0,35 = 5 x 35 centésimos = 175 centésimos

Estos recursos de cálculo que aparecen al resolver problemas se retomarán luego con actividades específicas, como los juegos o actividades de cálculo mental para afianzarlos y avanzar en su generalización.

Otros problemas que es necesario considerar refieren al **cálculo de una parte** de una cantidad. Esta es una tarea que puede ser nueva para este año, pero que es posible vincular con situaciones de reparto en partes iguales que ya se hayan realizado, como calcular la cuarta parte o la mitad. Lo nuevo será vincular la multiplicación y la división con las escrituras fraccionarias, ya que, por ejemplo, buscar las tres cuartas partes de 12 puede pensarse como dividir el 12 por 4 y tomar 3 partes, lo que supone pensar a 3/4 como el triple de la cuarta parte o también puede pensarse como hacer el triple de 12 y después averiguar la cuarta parte, es decir, calcular la cuarta parte del triple.

Es interesante observar que si se calcula la cuarta parte del triple, o el triple de la cuarta parte, se obtiene el mismo resultado, aunque el significado de lo que se hace sea distinto.



Para los alumnos, la idea de “parte de…” es más fácil de relacionar con una división que con la multiplicación, pero habrá que explicitar que hacer la mitad de 24 puede escribirse tanto 24 : 2 como 1/2 x 24, y agregar más adelante 0,5 x 24.

El siguiente es un ejemplo de un problema que enfrenta a los alumnos con una situación de **reparto**, uno de los significados de la división ya trabajados con los números naturales, y cuya resolución pone en evidencia relaciones aritméticas inherentes a la escritura de los números decimales.

• Gisela compró 5 lápices y pagó en total $ 7,5. ¿Cuánto le costó cada lápiz?

Un procedimiento posible es pensar en $ 1 para cada lápiz y después repartir los $ 2,50 que quedan, que son $ 0,50 más para cada lápiz. En este tipo de procedimientos, sigue funcionando el hecho de poder descomponer el número según convenga por la situación que se presente. También es posible que los alumnos utilicen resultados multiplicativos que tienen memorizados, como por ejemplo que 5 x 15 = 75 y deducir que cada lápiz debería costar $ 1,50. En resumen, lo que queremos mostrar aquí es que los alumnos pueden resolver problemas de multiplicación y división sin necesidad de haber aprendido el algoritmo.

Otro tipo de trabajo que es necesario plantear es el de análisis y reflexión de situaciones problemáticas que involucran **distintas operaciones** y/o diferentes significados de las mismas con el objeto de analizar los límites de la utilización de cada una de ellas.

A continuación, presentamos un fragmento del registro de una clase en la que se trabaja con los alumnos la problemática de diferenciar las situaciones multiplicativas de las aditivas.

Registro de clase

Maestro: –*Ahora les voy a dar de nuevo la lista de problemas que resolvieron el otro día y quiero que analicen, en el grupo, cuáles son los que ustedes resolvieron con suma y cuáles con multiplicación. Después vamos a discutir si solo es posible resolverlo de esa manera o si, por ejemplo, los que resolvieron con suma se pueden resolver con multiplicación o al revés, y si los que resolvieron con multiplicación se pueden resolver con suma, indistintamente. ¿Quedó clara la consigna?*

Algunos dicen sí, mientras el maestro reparte la fotocopia que se reproduce en la página siguiente.

El maestro pega en el pizarrón las resoluciones de los alumnos de días anteriores (…). Después del trabajo de los alumnos en los grupos, mientras habla, hace un cuadro en el pizarrón.

Maestro: –*Hay tres grupos que dicen que en el problema 1 se puede multiplicar y sumar y otros dos grupos dicen que es de suma.* (Anota en el pizarrón con signos de pregunta los problemas en los que hay discusión).

En cambio, todos coinciden con que en el problema 2 se puede multiplicar y también se puede sumar, así que lo ponemos en la tercera columna.

El problema 3, todos coinciden que es de suma y el problema 4, que es de suma y multiplicación.

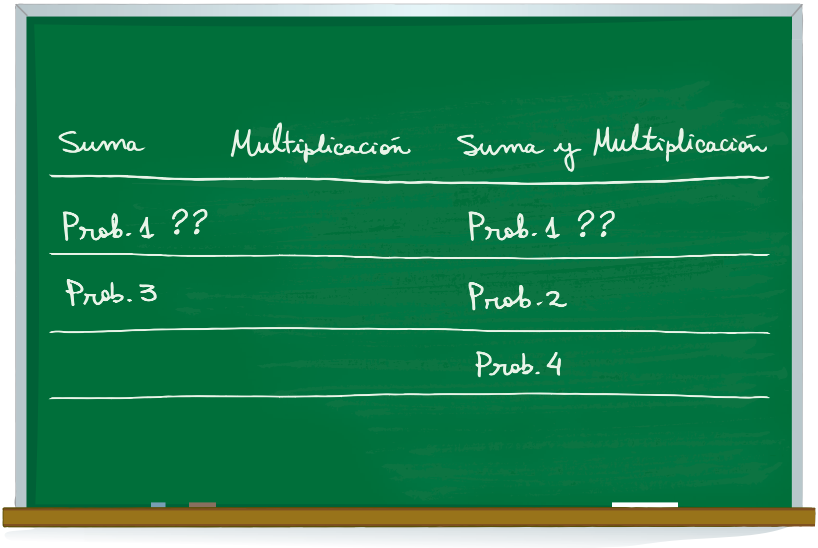
En la heladería de Rocío, todos los días usan frutillas para hacer helado. Pero como a veces incorporan gustos nuevos, compran más de lo que necesitan para poder experimentar recetas y muchas veces les sobran frutillas para el día siguiente.

1. Para hacer el helado de frutillas utilizan 5 kg de frutillas todos los días. Del día anterior quedaron 4 bandejas de $\frac{1}{2}$ kg y 9 bandejitas de $\frac{1}{4}$ kg; ¿les alcanza con lo que tienen o necesitan comprar más?

2. En cambio otro día la situación fue distinta: les habían quedado del día anterior 7 bandejas de $\frac{3}{4}$ kg. ¿Les alcanza para completar los 5 kg para el helado de frutillas?

3. Manuel, para ayudar a Rocío, fue a hacer el pedido, pero necesita saber cuántos kilos de frutilla le faltan para completar los 5 kg diarios. Tiene una bandeja de $\frac{3}{4}$ kg, otra de $\frac{1}{2}$ kg, otra de 1 kg y una chiquita de $\frac{1}{4}$ kg. ¿Cuánto tendrá que pedir Manuel al vendedor?

4. El jueves el proveedor les dejó 9 bandejitas de $\frac{1}{2}$ kg y 9 de $\frac{3}{4}$ kg; ¿para preparar el helado de frutillas de cuántos días les alcanza?



Maestro: *–Todos coinciden en que para resolver el problema 3, no se puede multiplicar. ¿Por qué?*
Nacho: *–Porque ahí son todos distintos los números (3/4 + 1/2 + 1 + 1/4).*
Mariano: *–Y porque ahí habla de las mismas cosas.*
Maestro: *–¿Dónde habla de las mismas cosas?*
Mariano: *–Ahí solo son kilos.*
Maestro: *–A ver…, a ver… Acá me hicieron un lío ustedes dos, porque me dijeron que eran distintos los números.*
Mariano: *–Sí… hay diferentes números, pero ahí habla de las mismas cosas… solo de kilos habla ahí.*
Maestro: *–¿Vos entendés lo que dice Mariano? ¿En cuál habla de las mismas cosas?*
Guille: *–En el de multiplicación se repite siempre el mismo número.*
Gaby: *–Sí, pero Mariano decía que eso era en los de suma…*
Mariano: *–Nooooo, yo no digo el mismo número, ¡digo la misma cosa! Ahí son todos kilos los que estoy juntando, no se mezclan las bandejas con los kilos.*
Maestro: *–Ahhh… vos decís que en los problemas de suma hay distintos números pero representan las mismas cosas. ¿Están de acuerdo?*
Coro: *–¡Sí!*
Maestro: *–Bueno, pero entonces es importante mirar bien si son o no las mismas cosas. ¿Y con los números? Algunos dijeron que sí es el mismo número el que se suma es multiplicación.*
Javier: *–En la multiplicación se repite siempre el mismo número.*
Maestro: *–A ver, miremos la suma y la multiplicación para el problema 2. ¿Quién me puede explicar con estos ejemplos cómo es eso? ¿A ver, Rocío?*

Rocío: *–En el problema 2 se repite siempre el mismo número… 3/4.*
Javier: *–Sí, es de multiplicación y cuando se hace la suma se repite siempre el mismo número.*
Antonio: *–Pero en el problema 3 no se suma siempre el mismo número.*
Javier: *–Y por eso no es de multiplicación.*
Maestro: *–Pero hay problemas como el 3 que son de suma pero no son de multiplicación. ¿Por qué?*
Francisco: *–Porque se suman todos números distintos.*
Maestro: *–Entonces en resumen hasta acá podemos decir que hay problemas de suma que no se pueden hacer con una multiplicación porque se suman distintos números. Y los problemas de multiplicación se pueden hacer como una suma en la que se suman los mismos números.*
Maestro: *–Pero, a ver, yo quiero hacer una pregunta, ¿es en el enunciado que se repite el número en los problemas de multiplicación?*
Nacho: *–Nooo.*
Guille: *–Sí.*
Maestro: *–Mmmm… algunos dicen sí y otros no… bueno, piensen eso, miren de nuevo los problemas y me cuentan dónde se repite y cuándo se repite el número.*

Este es el tipo de discusión que pone a los alumnos en el lugar de evaluar las características de una situación que determinan si puede resolverse con suma o multiplicación. Por otra parte, cabe aclarar que es posible hacer este tipo de trabajo cuando todavía no está sistematizado el algoritmo, ya que lo que se busca es que se identifique la situación como multiplicativa o aditiva (en este caso) aunque sigan resolviendo las dos situaciones con recursos aditivos.

Plantear situaciones para avanzar en el análisis de relaciones de proporcionalidad

En este apartado nos ocuparemos del análisis de relaciones de proporcionalidad, entendiendo que un avance en el análisis de las mismas requiere abordar las operaciones de multiplicación y división de fracciones y decimales por un natural y viceversa. Debemos aclarar, sin embargo, que para que los alumnos estén en condiciones de estudiar estas relaciones en el campo de los racionales, es necesario que ciertas propiedades, tales como: ***al doble le corresponde el doble, al triple el triple, etc.*** y ***a la mitad la mitad,*** ya hayan sido trabajadas en problemas con números naturales.

A continuación, presentamos un conjunto de problemas en los que analizaremos las variaciones y dificultades que podrían proponerse.

• Completá las siguientes tablas:

1. Entre los ingredientes que se utilizan para preparar alfajores, se encuentra el almidón de maíz. La tabla siguiente relaciona la cantidad de alfajores que se desean preparar con el peso del almidón necesario para tal fin:

Peso del almidón de maíz (kg)	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{2}$			$1\frac{1}{2}$
Cantidad de alfajorcitos		48	24	96	

2. Esta tabla relaciona los precios de las manzanas con sus pesos en kg.

Peso de las manzanas (kg)	5	3	$\frac{1}{4}$	1	$\frac{1}{2}$
Precio de las manzanas ($)		9			

Los conocimientos que han adquirido los alumnos en relación con la proporcionalidad con naturales les permiten recuperar las relaciones multiplicativas *(a el doble de… le corresponde el doble, al triple de…, a la mitad de…, a la cuarta parte de…)* y aditivas *(a la suma de... le corresponde la suma de…)* para usar herramientas propias de cálculo.

En el primer problema tienen que obtener una fracción como resultado de evaluar la relación entre los enteros 24 y 96 respecto del valor conocido 48. En el caso del 24, deben establecer que se trata de la mitad de 48, por lo tanto le corresponderá un peso igual a la mitad de 1/2, es decir 1/4. Y a 96, como es el doble de 48, le corresponderá el doble de 1/2, o sea el entero. En los otros dos casos pueden apoyarse en estos resultados, a partir de establecer relaciones entre las fracciones, para obtener los valores que se solicitan. El 3/4 podría pensarse como la suma de 1/2 y 1/4 y, por lo tanto, le corresponderá la suma de los valores correspondientes a estos (48 + 24) o, a partir del dato que se tiene para 1/2 y usando 3/4, que es la suma de 1/2 + 1/4, entonces se podrá calcular el valor correspondiente para 1/4 como la mitad de 1/2 y luego sumar los valores correspondientes a estos dos. Para 1 1/2 también deben apelar a la idea de que a la suma de dos valores de una de las variables le corresponde la suma de los valores correspondientes de la otra variable.

En el segundo problema, es necesario averiguar, al inicio, el precio de 1 kg de manzanas porque a partir de este valor se pueden obtener los demás precios.

Así, para saber el precio de los 5 kg, será suficiente con multiplicar por 5 ese valor. Y para el caso de 1/2 kg y 1/4 kg, habrá que dividir por 2 y por 4, respectivamente, el precio de 1 kg hallado. La dificultad en este problema está dada por el cálculo de la mitad de un entero que arroja un decimal (3 : 2 = 1,5), lo mismo que para la mitad de la mitad (1,5 : 2 = 0,75). Aun así el contexto del dinero es de gran ayuda, por cuanto les permitirá utilizar resultados y relaciones entre determinados valores conocidos para determinar los precios solicitados.

Por otro lado, estamos pensando en alumnos que vienen obteniendo resultados a partir de cálculos "pensados", esta es la razón por la que en el análisis que hacemos no consideramos la posibilidad de que comiencen a realizar el cálculo para 5 kg a partir de saber el precio de 3 kg, dado que esto demandaría el uso de la regla de tres simple. Desde nuestro punto de vista, y dado que se trata del inicio de estos aprendizajes, no es necesario promover el uso de esta regla.

En función de los conocimientos disponibles de los alumnos, es posible avanzar incluyendo algunos problemas donde la constante de proporcionalidad sea un número racional (1/2, 0,5, 1/4), como por ejemplo en el caso siguiente.

• Para la venta de frutillas se utilizan bandejas de diferentes tamaños, lo que hace que los pesos del contenido de frutillas varíen de una a otra. Completen estas tablas que relacionan la cantidad de bandejas con el peso total del contenido de estas, para bandejas de diferentes tamaños:

Cantidad de bandejas de frutillas	3	2	9	7		
Peso del contenido (kg)	$\frac{3}{4}$				$1\frac{1}{2}$	$1\frac{1}{4}$

Cantidad de bandejas de frutillas	2	5	6	1	
Peso del contenido (kg)	$1\frac{1}{2}$				3

Aquí, como en las demás situaciones, es necesario comparar los valores dados de las dos magnitudes para determinar la relación entre ellas. Sin embargo, esto no es "visible" tan fácilmente pues 3 no es múltiplo de 3/4. Recordemos que las relaciones de múltiplo y divisor se dan entre los enteros.

Para el primer caso, se podría comenzar por obtener el valor correspondiente a 9 bandejas, teniendo en cuenta que este número es el triple de 3, y calcular así el triple de 3/4; luego sería posible seguir con el cálculo de cuántas bandejas corresponderían a 11/2 kg, teniendo en cuenta que este valor representa el doble de 3/4. También es posible considerar que 3/4 = 3 x 1/4, lo que permite advertir que cada bandeja pesa 1/4. Para obtener cuánto pesan 7 bandejas, también es posible utilizar distintos procedimientos, por ejemplo calcular el peso de 6 bandejas (obteniendo el doble de 3/4) y luego sumándole el peso de 1 bandeja o restando al peso de 9 bandejas el peso de 2 bandejas. Socializar estos diferentes caminos permitirá sistematizar conclusiones acerca de los diferentes procedimientos posibles y la vinculación que estos tienen con las relaciones de proporcionalidad. En la puesta en común también hay que evaluar los datos que proporciona la tabla y decidir, en función de este análisis, de qué modo conviene calcular. No se trata de seguir el orden en el que aparecen los valores en la tabla, sino de analizar cuáles sirven para calcular otros de manera más económica.

Este es el tipo de análisis y discusiones que buscamos con estas propuestas, ya que lo que propiciamos en 5º año/grado es la elaboración de recursos de cálculo adecuando los mismos a las diferentes situaciones presentadas, de manera de preparar el camino para la sistematización de estrategias generales a realizarse en 6º año/grado. Es decir, una vez más, la técnica experta y general debería ser el cierre de los aprendizajes obtenidos a partir de todo un proceso de enseñanza que dura varios años/grados y que, en este caso, se ha iniciado en 4º año/grado con los números naturales.

Para calcular de diferentes formas con fracciones y decimales al resolver problemas

El aprendizaje de diferentes procedimientos y técnicas de cálculo en el campo de los racionales incluye un trabajo con los algoritmos, el cálculo mental y el uso de la calculadora. Se busca formar un sujeto que sea capaz, frente a un problema, de decidir si lo que se le requiere es una respuesta exacta o una aproximada y, en función de esto y del tipo de números involucrados, cuál es el procedimiento de cálculo más pertinente.

Cuando se pone el acento sobre la enseñanza de los algoritmos, muy rápidamente los aprendizajes de los alumnos quedan reducidos a la memorización de un conjunto de reglas para cada una de las operaciones y se empobrece la comprensión de las mismas. Es más, la aplicación de las reglas remite directamente a operar con naturales, los numeradores y los denominadores, sin que se advierta que cada fracción es un número.

Por ejemplo, si para sumar $5\,{}^{3}/_{4}$ + 7/2 los alumnos solo dispusieran del recurso del algoritmo (buscando el común denominador), se perderían una buena oportunidad de poner en juego relaciones entre las fracciones como:

Nahuel

En un entero hay cuatro cuartos así que 5 es $\frac{20}{4}$. $\frac{7}{2}$ son $\frac{14}{4}$ y entonces el resultado es
$20+3+14$ $\frac{37}{4}$ que es 9 y $\frac{1}{4}$

Melina

$\frac{3}{4}$ es $\frac{1}{2}$ y $\frac{1}{4}$
$\frac{7}{2}$ más $\frac{1}{2}$ es $\frac{8}{2}$ que es 4
5 y 4 es 9 y $\frac{1}{4}$ que queda $9\frac{1}{4}$

Entender la cuenta de estas maneras no es lo mismo, bajo ningún punto de vista, que solo saber el algoritmo para resolverla. No se aprende lo mismo si solo se toma contacto con el “final de la película” que si se participa en la elaboración de la misma. Al respecto, resulta esclarecedora la siguiente afirmación:
Centrar la enseñanza de fracciones tomando el algoritmo como punto de partida olvida completamente la historia de los conocimientos matemáticos en general y de los algoritmos en particular. Estos representan un lugar de encuentro, de síntesis, son y han sido los procedimientos más económicos que cada cultura fue capaz de construir en su tiempo. En tanto más económicos, necesariamente posteriores a aquellos que han sido dejados de lado. La escuela no alienta a que los alumnos (ni los docentes) reflexionen sobre este tipo de cuestiones”[31].
No estamos afirmando que los alumnos no deban aprender los algoritmos, sino que si el punto de partida y de llegada de la enseñanza se asienta en el aprendizaje de los mismos, el campo de acción de los alumnos se verá enormemente reducido. Tampoco se trata de cambiar una regla por otra ahora hay que pasar primero a fracciones equivalentes para luego sumar o restar. Estamos pensando en darles la posibilidad a los alumnos de llegar a las reglas, pero partiendo de recursos de cálculo producidos por ellos, privilegiando de esta manera la comprensión y control de los cálculos.

Para lograr que los alumnos se involucren en un trabajo como el citado anteriormente, es necesario presentarles situaciones que vayan de los problemas a los recursos de cálculo (cálculo mental y posteriormente a los algoritmos) y viceversa. De esta manera, estaríamos instalando la idea de que los cálculos son herramientas que permiten resolver los problemas, pero que, al mismo tiempo, estudiarlos en sí mismos permitirá determinar, entre otras cosas, los alcances y

[31] Ponce, H. (2000), *Enseñar y aprender matemática. Propuestas para el Segundo Ciclo.* Buenos Aires. Novedades Educativas

límites de su utilización. La elaboración de estrategias y el estudio de las mismas son dos actividades esencialmente diferentes, pero imbricadas al mismo tiempo; mientras que una los enfrenta con la necesidad de buscar y producir procedimientos de solución a problemas, la otra los pone en situación de hablar de los mismos y les abre la posibilidad de adquirir mayor dominio sobre ellos. Esta es la razón por la que presentamos las actividades organizadas en dos apartados diferentes: “Plantear situaciones para elaborar y comparar diferentes procedimientos de cálculo” y “Plantear situaciones para explicitar estrategias de cálculo mental”.

Plantear situaciones para elaborar y comparar diferentes procedimientos de cálculo.

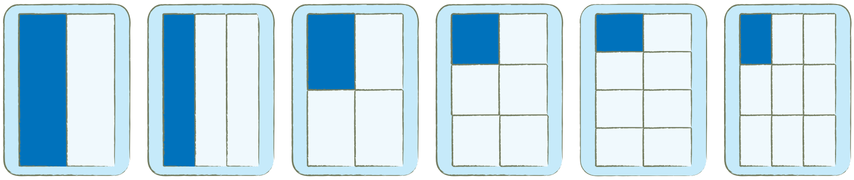
La propuesta para este año es retomar los procedimientos conocidas e incluir otras fracciones (con numerador 1 y mayor y menor que uno, números mixtos, tercios, sextos y novenos, etc.) y decimales (con décimos, centésimos y milésimos) para hacer progresar a los alumnos en sus conocimientos acerca de dichas estrategias. El estudio de los distintos procedimientos de cálculo puede pensarse recuperando los que producen los alumnos al resolver problemas o al jugar para abordar luego el estudio de las estrategias de cálculo independientemente de los contextos que les dieron origen.

En este sentido, para resolver 3/2 + 1/4, haber resuelto problemas antes ayuda a recurrir a ellos para poder pensar algo: *esto es lo mismo que cuando hacíamos el problema de los alfajores, 3/2 era lo mismo que 6/4, entonces si sumo otro cuarto es 7/4…* Los procedimientos que los niños producen se asientan en conocimientos ya trabajados sobre las relaciones entre las fracciones y entre estas y el entero (en 1 entero hay dos medios, cuatro cuartos, tres tercios, ocho octavos; en 1/2 hay dos cuartos, cuatro octavos, etc).

Para dar lugar a la elaboración de estrategias personales de **suma de fracciones**, es posible proponer juegos de cartas como el siguiente:

> **“El uno”:**[32] construir un conjunto equivalente a un entero.
> **Materiales:** se necesitan 2 mazos de 32 cartas cado uno: uno rojo y uno azul. Cada mazo está formado por cartas con rectángulos y, en cada caso, se han pintado: 2 cartas con 1/2, 3 cartas con 1/3, 4 cartas 1/4, 6 cartas 1/6, 8 cartas con 1/8, 9 cartas con 1/9.

[32] Elaborado por el equipo de Matemática de la Asesoría Técnico-Pedagógica del Consejo General de Educación: I. Saiz, C. Camerano y C. Barrionuevo.



Organización de la clase: se juega en grupos de 3 o 4 jugadores.
Desarrollo: se reparten 10 cartas a cada integrante. Cada jugador trata de formar un conjunto equivalente a un entero con las cartas que le tocaron. El juego equivalente a uno con el menor número de cartas gana la vuelta. Luego, se reparten las cartas que quedaron sin repartir y se vuelve a jugar.

"Escoba del uno": sumas que dan 1.
Materiales: los mismos que para el juego anterior.
Organización de la clase: se juega entre 3 o 4 jugadores.
Desarrollo: se reparten 3 cartas a cada jugador y se colocan 4 cartas boca arriba en el centro de la mesa. Cada jugador, por turno, trata de formar un entero con una de sus cartas y la mayor cantidad de cartas de la mesa. Si lo forma, las levanta y las coloca a su lado. Si no puede formar un entero, tira una de sus cartas al centro de la mesa. Continúa el siguiente jugador. Una vez que juegan los 4 jugadores, se reparten nuevamente 3 cartas a cada jugador, pero no se agregan nuevas cartas al centro. Gana un punto cada jugador que haya formado un entero recogiendo todas las cartas de la mesa y otro punto por el mayor número de cartas recogidas.

Una característica de estos juegos es que favorecen la adquisición del sentido de la suma como reunión de las partes de un todo y en todos los casos se trata de sumas de fracciones de numerador uno.

A partir de estas situaciones, se puede iniciar el proceso de descontextualización con vistas a que los alumnos dispongan de las estrategias de cálculo que pudieron haber elaborado en este contexto. Para esto, luego de jugar, una primera actividad podría ser proponer un conjunto de cuentas que simulen jugadas. Por ejemplo, para el caso de la "escoba", se puede proponer:

- Martín tiene entre sus cartas una de $\frac{1}{6}$, y en la mesa hay dos cartas de $\frac{1}{6}$, una de $\frac{1}{2}$, una de $\frac{1}{3}$ y dos de $\frac{1}{4}$. Él dice que la mayor cantidad de cartas que puede levantar para formar un entero es de 4.
¿A qué cartas se refiere?

Haciendo variar la cartas de la mesa y las que podría tener un jugador se puede hacer que los alumnos pongan en juego distintas relaciones entre las fracciones y con el entero. Es importante que estas variaciones las piense y plantee el docente, porque es el que tiene claro los objetivos de aprendizaje y, en consecuencia, el que sabe cuáles son las "partidas" más pertinentes para introducir las discusiones y posteriormente las conclusiones que quiere obtener.

Posteriormente a las partidas simuladas, una variante que permite seguir profundizando el análisis de las estrategias de cálculo que pudieron haber elaborado en el contexto del juego es la siguiente:

- Usando el mismo tipo de procedimientos que en el juego "Escoba del uno" decí cuáles de estas sumas dan un entero. En el caso de no ser así, decí cuánto sobra o cuánto falta.

a) $\frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} =$

b) $\frac{1}{9} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{6} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} =$

c) $\frac{1}{6} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} =$

d) $\frac{1}{9} + \frac{1}{6} + \frac{1}{9} + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} =$

- Buscá el total de:

a) $\frac{1}{8} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} =$

b) $\frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} =$

c) $\frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{6} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} =$

- Resolvé:

a) $\frac{8}{2} + \frac{9}{8} + \frac{3}{2} + \frac{6}{4} =$

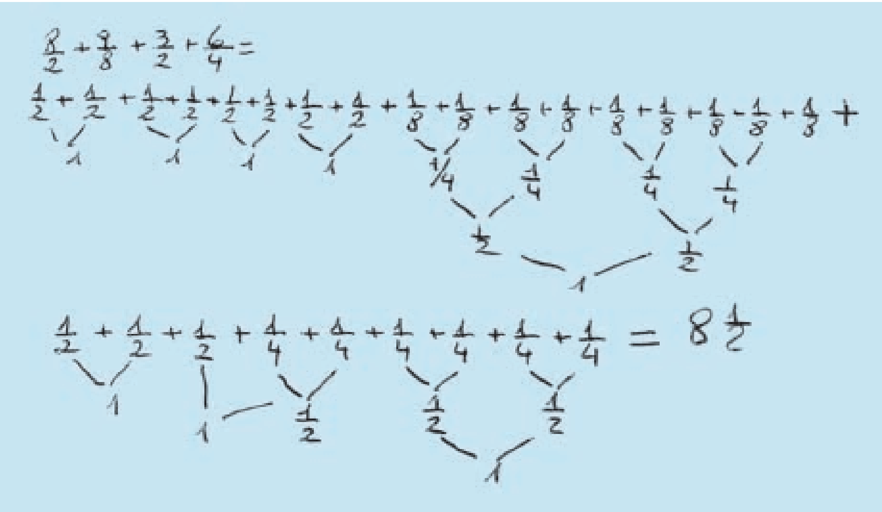
b) $3\ \frac{6}{8} + \frac{18}{4} + \frac{5}{8} + \frac{5}{4} =$

c) $3\ \frac{1}{8} + \frac{3}{2} + \frac{12}{4} - \frac{7}{8} =$

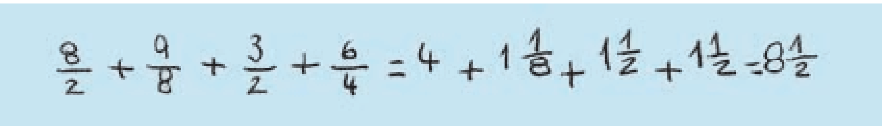
Es importante destacar que este tipo de ejercicios pone a los chicos en situación de usar lo aprendido a partir de los juegos y de las actividades como las señaladas antes (completar enteros), pero también estamos apelando a que los chicos se conecten con otros conocimientos tales como: que en 1/2 entran dos cuartos, cuatro octavos, etc.

A continuación, veremos cómo resolvieron el punto a) del tercer ejercicio alumnos que estuvieron realizando un trabajo como el anterior, ya que de otro modo es poco probable que surjan producciones como las siguientes.

Gonzalo



Yoel



Para que los alumnos avancen desde procedimientos como el primero hacia el segundo, se hace necesario confrontar estas producciones para analizarlas. El primer caso muestra claramente un procedimiento ligado al juego. Para este alumno, 8/2 es 8 veces 1/2 y lo tiene que explicitar (por escrito) para posteriormente armar los enteros, no ve ***de entrada***, como el otro alumno, que 8/2 es 4 enteros. Es decir, que tiene que desagregar para luego armar los enteros, evidenciando que aún no se ha apropiado de una definición de fracción como 1/n x n veces = 1, que es precisamente lo que se está usando en el segundo caso. El alumno relaciona cada fracción con el entero anotando lo que *sobra*, y luego halla el total de enteros y la fracción *sobrante*: 8 1/2. A partir de la comparación, tiene que quedar claro para toda la clase que en el segundo procedimiento se usa la relación que tiene cada fracción con el entero *el octavo entra 8 veces en el entero* o *con 8 octavos se forma un entero* y de la misma manera para los casos de los cuartos y medios.

Un trabajo similar al analizado para las fracciones se puede realizar con las **sumas de decimales**. Presentamos a continuación un juego que remite a un posible inicio en el tratamiento del cálculo mental con estos números.

"El cinco y medio": suma de números decimales.
Materiales: se juega con las siguientes cartas, y se arma un mazo con cuatro de cada una.

Organización de la clase: se juega en grupo de 4 jugadores.
Desarrollo: se reparte una carta para cada jugador y tiene que pedir todas las cartas que quiera para tratar de aproximarse lo más posible a 5,5. Cada jugador decidirá cuándo le conviene "plantarse", para no pasarse del valor indicado. Se anota un punto el jugador que más se acerque en cada vuelta.

En el caso de la **multiplicación de un número natural por una fracción y de la división**, ya planteamos en el apartado *Para operar con fracciones y decimales al resolver problemas* algunas situaciones que, al mismo tiempo que dan sentido a estas operaciones, permiten analizar los recursos de calculo utilizados. Para ampliar estos recursos de cálculo, es posible considerar nuevamente un juego que permite introducir otros números y otras relaciones.

"¿Partes o veces?": multiplicación y división con fracciones.
Materiales: 20 tarjetas con números como las dibujadas.

$\frac{3}{4}$	$\frac{7}{2}$	$\frac{6}{8}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{5}{4}$
$\frac{4}{5}$	$\frac{2}{3}$	$1\frac{1}{2}$	$2\frac{3}{8}$	$1\frac{3}{6}$
2	32	16	8	24
12	4	6	28	20

Dos mazos uno rojo y uno azul, de 10 tarjetas cada uno, con las siguientes leyendas.

Calcular $\frac{1}{4}$ de...	Calcular $\frac{1}{2}$ de...	Calcular $\frac{3}{4}$ de...	Calcular $\frac{3}{4}$ de...
Calcular $\frac{1}{8}$ de...	Calcular $\frac{1}{8}$ de...	Calcular el **doble** de...	Calcular el **triple** de...
Calcular el **cuádruplo** de...	Calcular el **quíntuplo** de...		

Organización de la clase: se divide el curso en 2 grupos.
Desarrollo: se mezclan todas las tarjetas con leyendas, las rojas y las azules, en un mazo y las tarjetas con números se separan en dos mazos por color. Se ubican los tres mazos boca abajo, por separado, sobre el escritorio. Los 2 grupos participan por turno a través de uno de sus integrantes por vez. Pasa un alumno de uno de los grupos y saca una carta del mazo de las cartas con las leyendas y otra carta del mazo de los números, según el color que corresponda. Muestra ambas cartas a toda la clase, por ejemplo, "calcular 3/4 de 16". El alumno debe decir lo más rápido posible el resultado, pues tiene 2 minutos como máximo, y lo anota en el pizarrón. Es conveniente que dicho alumno anote o recuerde cómo hizo para calcular el resultado, porque eso se pondrá en discusión una vez terminada cada ronda.

Se juegan 6 u 8 partidas, aproximadamente, no menos. Luego de realizada esa ronda del juego (3 o 4 alumnos de cada grupo), se analiza entre todos los alumnos, en el pizarrón, si los resultados son correctos, y se le otorga el puntaje correspondiente. Si hay dudas, el alumno que obtuvo el puntaje debe explicar lo que hizo, así se decide la validez de la respuesta. Se juegan varias rondas y gana el grupo que haya obtenido mayor puntaje.

Una vez finalizado el juego, sería conveniente organizar una actividad colectiva de reflexión sobre lo realizado. Por ejemplo, *preguntando si todas las tarjetas les ofrecieron igual dificultad*, haciendo un listado de procedimientos que utilizaron en las fáciles y en las difíciles, analizando la diferencia entre uno y otro caso.

Plantear situaciones para explicitar estrategias de cálculo mental

Para que una estrategia de cálculo se transforme en una estrategia disponible para cada uno de los alumnos de una clase, no es suficiente con que participen en actividades como los juegos, aun con todas las ventajas que esta producción propia y original implica. Es necesario ocuparse de las estrategias de cálculo, desde la comprensión de los procedimientos elaborados por otros y el análisis de las diferencias entre uno y otro, hasta hacerlas propias a partir de utilizarlas, de reconocer sus límites y ventajas, etc. Algunas actividades de esta clase ya han sido propuestas en el apartado anterior.

Además, es posible proponer nuevos problemas en los que se deban utilizar las estrategias ya descubiertas con otros números: fracciones mayores y menores que los enteros, otras de denominadores diferentes a los cuartos, medios y octavos. Por ejemplo, el siguiente problema.

• Resolvé las siguientes sumas, agrupando primero los enteros.

a) $\frac{3}{2} + \frac{6}{4} + \frac{7}{4} + \frac{5}{2} =$

b) $\frac{11}{8} + \frac{3}{4} + \frac{7}{2} + \frac{13}{8} =$

c) $\frac{7}{5} + \frac{12}{10} + \frac{2}{5} + \frac{21}{10} =$

d) $\frac{4}{3} + \frac{12}{9} + \frac{1}{2} + \frac{19}{3} =$

En el primer cálculo, se obtiene fácilmente $7\,^1/_4$. Sin embargo, en los otros ejercicios se introducen algunas dificultades. En b) hay una fracción que es menor que el entero y el resultado podría quedar expresado provisoriamente como $6\ ^1/_2\ ^3/_4$. En este caso, en el 1/2 + 3/4 hay un entero y 1/4, por lo que es preciso usar relaciones entre estos números también para armar enteros. En los ítems c) y d) también se necesita realizar un análisis similar, pero en estos casos apelando a relaciones entre décimos, quintos, tercios y novenos, respectivamente.

A continuación, presentamos un fragmento de registro que muestra la dificultad de los alumnos para entender una actividad “nueva” para ellos, como la que les estamos planteando aquí y cómo el docente puede guiar la confrontación para que se centre en lo que efectivamente se pretende discutir y no se desvíe a una simple corrección de los resultados.

Registro de clase

José

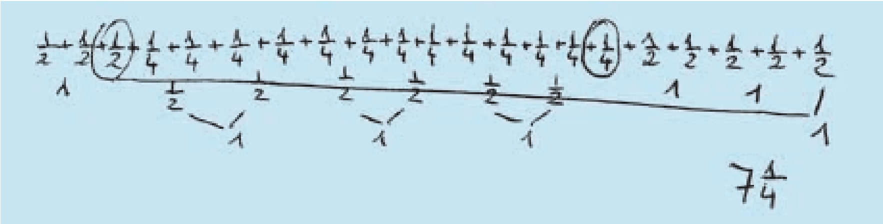
A)

$$1\frac{1}{2} + 1\frac{2}{4} + 1\frac{3}{4} + 2\frac{1}{2} = 5\frac{1}{4}$$

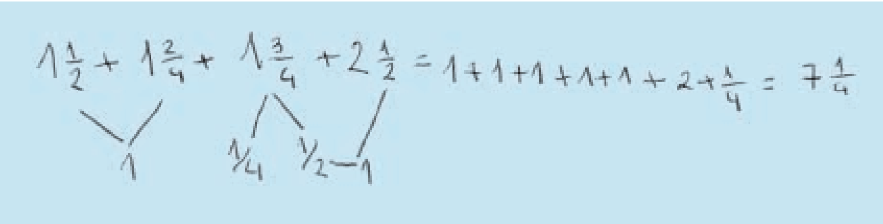
1

$1\frac{1}{4}$

Martín



Rocío



Maestra: *–Bueno, chicos, vamos a mirar cómo hicieron acá los compañeros. Vamos a controlar si respetaron la consigna.*
Federico: *–Sí, seño, Martín y Rocío hicieron igual… porque les salió el mismo resultado, pero José hizo mal.*
Maestra: *–A ver… ¿vos decís que estos dos están de acuerdo a la consigna porque les salió el mismo resultado? ¿Están de acuerdo con Fede?*
Marisa: *–Sí, seño, está bien lo que hicieron Martín y Rocío.*
Augusto: *–Está bien… pero no lo hicieron armando directamente los enteros… eso había que hacer… ¿no, seño?*
Maestra: *–Eso es lo que les estoy preguntando… si están cumpliendo con la consigna… ¿Cuál era la consigna?*
Karina: *–Resolver usando el procedimiento que vimos ayer.*
Augusto: *–Sí, eso digo yo… que había que armar directamente los enteros.*
Maestra: *–¿Y qué quiere decir eso de armar directamente los enteros? A ver, ¿quién lo puede explicar de otra manera? Ayer hablamos bastante sobre ese procedimiento.*
Pedro: *–Yo, seño…*
Maestra: *–A ver…*
Pedro: *–Ayer dijimos que hay que tener en cuenta que 4 de un cuarto forman un entero… y no estar haciendo…1/4 y otro 1/4 es 1/2, 1/4 y otro 1/4 es 1/2… y así, hay que decir directamente 4 de un cuarto ya son un entero.*

Rocío: –*Sí seño, si tenemos 6/4 ya sabemos que con 4/4 formamos un entero, eso ya lo sabemos... no necesitamos hacer todo ese lío.*
Maestra: –*Bueno, entonces, acá lo que tenemos que controlar es si usaron ese procedimiento o no… eso sería en este caso analizar si se respeta la consigna… miren los procedimientos y les vuelvo a preguntar enseguida…*

Hasta aquí estuvimos proponiendo que utilicen un procedimiento en particular, con el objetivo de que se apropien del mismo. Introducimos también variaciones en las cantidades, para hacer aparecer nuevas problemáticas. Nos referimos, en este caso, a *cómo hacer para sumar dos fracciones como 1/2 y 3/4*, para luego analizar cuáles son los procedimientos posibles y cuáles son las características particulares que tienen estas fracciones que los hacen posibles (sus denominadores son múltiplos).

Se puede incluir también el análisis de nuevos procedimientos con la siguiente consigna:

- ¿Cómo pensaron los que hicieron estas sumas?

$\frac{1}{2} + \frac{3}{4} = \frac{2}{4} + \frac{3}{4} = \frac{5}{4}$ o

$\frac{1}{2} + \frac{3}{4} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = 1$ y $\frac{1}{4}$.

Aquí, mientras que en el primer caso se está pensando que *1/2 es lo mismo que 2/4*, es decir, transformando una de las fracciones en una equivalente de igual denominador que la otra, en el otro caso, se está pensando cómo hacer para completar al entero y, para ello, se desarma una de las fracciones, sacando lo que le falta (saca 1/2 de 3/4) para llegar a 1. Al tener dos procedimientos, es posible proponer el análisis de cuándo conviene usar cada uno, como se plantea en la siguiente actividad.

- Calculá las siguientes sumas y restas. Antes de hacerlo, pensá si conviene utilizar equivalentes o completar enteros.

a) $\frac{6}{7} + 1 =$

b) $\frac{17}{3} + 1 =$

c) $\frac{19}{5} - 2 =$

d) $\frac{3}{5} + 2 =$

e) $\frac{17}{4} - 1 =$

Profundizando aun más el análisis que venimos haciendo, se podría proponer que inventen otras sumas que se puedan resolver con este procedimiento, de manera de acercarlos a la explicitación de los límites de utilización del mismo. Otra variante posible para este mismo fin es presentar un listado de sumas solicitando que reconozcan en cuáles de ellas se puede utilizar el mismo procedimiento y en cuáles no.

En el juego del “Cinco y medio”, los alumnos estuvieron realizando sumas de ciertos números (mitades, cuartos, tres cuartas partes de enteros) componiéndolos, con el objetivo de formar una cantidad lo más cercana posible al 5,5. La socialización de las “maneras de arreglarse” de algunos alumnos es un inicio interesante en la discusión de los distintos procedimientos, pero es preciso plantear a toda la clase actividades como:

• Un alumno recibió la carta con el 0,75, entonces pidió 4 cartas y recibió las siguientes: 2,25 – 1,50 – 0,25 – 0,50. ¿Cuál podría ser una manera rápida de obtener el total?

• Resolvé los siguientes cálculos agrupando los números de tal manera de obtener una respuesta lo más rápida posible:

a) 4,25 + 1,50 + 2,25 =
b) 2,75 + 3,50 + 1,25 + 5,50 =
c) 1,50 + 9,25 + 1,75 + 2,25 =

En relación con el juego “¿Partes o veces?”, se podría pensar en una secuencia similar a las ya analizadas. En este juego no es lo mismo sacar tarjetas que impliquen calcular la mitad de cualquiera de los números, que si hay que calcular la cuarta parte, la octava parte, o las tres cuartas partes. Al calcular mitades de los números de las cartas azules, siempre se obtienen enteros pero, por ejemplo, es más complejo obtener la cuarta parte de 6 y aun más complejo calcular 1/8 de 1/2.

Todas estas actividades buscan que se expliciten procedimientos y se dispongan en la memoria de una serie de relaciones entre las fracciones y con el entero para encontrar equivalencias, resolver sumas o restas y encontrar fracciones de números naturales, determinando cuáles son las estrategias más económicas y/o convenientes.

Para trabajar con la información

En este apartado, incluimos propuestas que toman la idea de tratar información desde una perspectiva amplia que implica no solo reflexionar acerca de cómo trabajar con los datos, sino también cómo obtener, organizar y representar conjuntos de datos. En principio, y como ya se ha expresado en los cuadernos anteriores, cada vez que se resuelve un problema se trata información. Por lo tanto, son aspectos propios de la resolución del mismo el análisis de los datos en un contexto y el modo en que estos se presentan, con enunciado verbal, gráficos o tablas, la selección de incógnitas, el número de soluciones (una, varias, ninguna), entre otros tantos.

En este sentido, la variación en la presentación y en las preguntas asegura una mejor posibilidad de resolución de situaciones fuera de la escuela pues, en general, los problemas que se deben resolver en estos casos no se presentan con un enunciado y, muchas veces, para una cierta pregunta, no tenemos toda la información necesaria para responderla.

Por otra parte, las actividades ligadas a la obtención, organización y representación de conjuntos de datos dan inicio, en el Segundo Ciclo, a enfrentar a los chicos con nociones que luego invertirán al estudiar estadística.

Estas actividades, ya propuestas para años anteriores, comienzan con la interpretación de tablas y gráficos ya confeccionados. En 5º año/grado proponemos avanzar hacia actividades en las que sea necesario pasar la información de una forma de presentación a otra incluyendo, además de las conocidas, los gráficos de barras y los pictogramas.

Es importante aclarar que los ejemplos que incluimos en este apartado corresponden a contenidos incluidos en el Eje “Número y Operaciones”. Sin embargo, el trabajo de tratamiento de la información que aquí recuperamos es transversal a todos los contenidos señalados en los NAP, por lo que al desarrollar los contenidos del Eje “Geometría y Medida” incluiremos otras propuestas similares.

Plantear situaciones para establecer relaciones entre datos e incógnitas

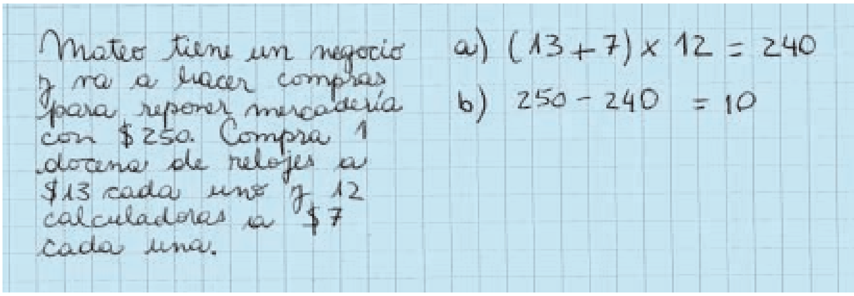
Una tarea interesante es la producción de problemas a partir de diferentes informaciones. Así, cuando un alumno produce un problema o lo transforma –al incluir otros datos o idearle posibles preguntas– intervienen en el proceso tanto su posibilidad de interactuar con la información como el sentido matemático que les otorga a las nociones involucradas en el contexto planteado.

Por ejemplo, podríamos ofrecer preguntas con referencia a un contexto para que los chicos describan la situación y elijan los datos adecuados, o bien darles un cálculo o una medida y que deban proponer un problema que incluya su realización, o también formular la pregunta en función de una resolución dada.

1. Proponé un problema que se resuelva con el cálculo: 240 : 4.
Modificá el problema que formulaste, para que se resuelva con 240 : 4 – 52.

2. ¿Cuáles pueden ser la o las preguntas de este problema si para responderlas un chico hizo estas cuentas?

Javier


Mateo tiene un negocio
y va a hacer compras
para reponer mercadería
con $250. Compra 1
docena de relojes a
$13 cada uno y 12
calculadoras a $7
cada una.

a) $(13 + 7) \times 12 = 240$

b) $250 - 240 = 10$

La cuenta del problema 1 puede ser pensada como un reparto o como una partición si se tratara de cantidades, pero como no se indica el contexto, también podría ser un problema con números. Analizar los significados atribuidos a las operaciones en las producciones de los chicos permitirá al docente conocer cuáles dominan y cuáles seguir trabajando.

Es posible que, en el problema 2, los chicos enuncien dos preguntas, una para cada cálculo. Una discusión interesante podría plantearse ante una intervención como la siguiente: ¿Es necesario hacer dos preguntas o podríamos hacer una?

Como hemos planteado para los años anteriores, también es importante presentar problemas donde la pregunta tenga más de una respuesta, para que los chicos no construyan la idea de que un problema tiene siempre una única solución.

- Claudio tenía caramelos y los repartió entre 6 amigos, dándole a cada chico la misma cantidad de caramelos, y no le sobró nada. ¿Cuántos caramelos podía tener?

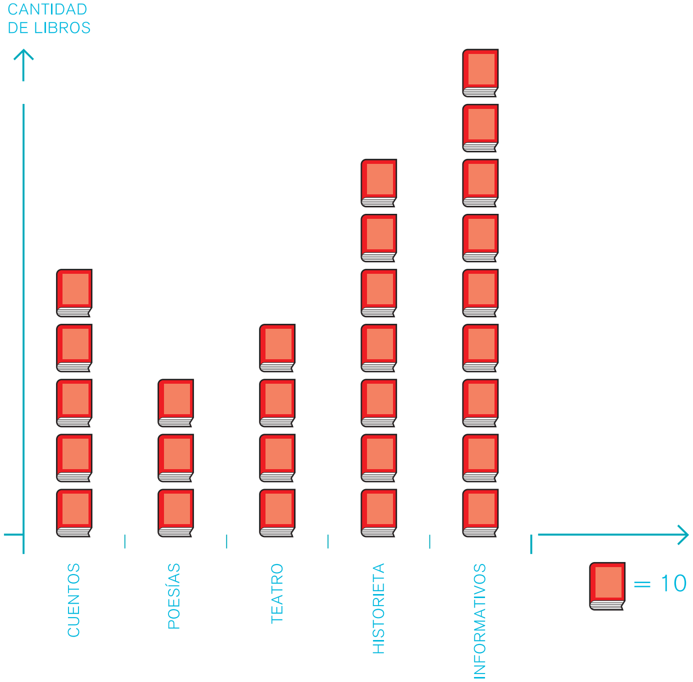
Analizar el texto del problema supone reconocer que Claudio podía tener 6, 12, 18 caramelos, es decir que hay muchos números que responden la pregunta. Las soluciones que podrán hacer los chicos incluirán tanto un único número como un listado de posibles soluciones y algunos reconocerán que esos números son los múltiplos de 6. El problema tiene infinitas soluciones, porque esos múltiplos son infinitos.

Plantear situaciones para obtener y organizar datos

Las actividades para obtener y organizar datos comienzan en el Primer Ciclo, cuando se juega a los dados o se realiza una votación, por ejemplo, para elegir el nombre de la biblioteca del aula, y se registran en una tabla los puntos o votos obtenidos.

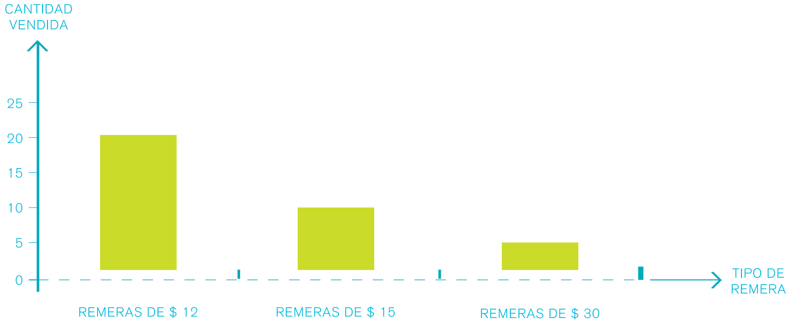
Otras actividades implican la interpretación de tablas y gráficos ya confeccionados. En este sentido, resulta interesante en 5° año/grado incluir la interpretación de los gráficos estadísticos denominados pictogramas. En esta representación, al igual que los gráficos de barra, se usan escalas que conservan la proporcionalidad entre las cantidades intervinientes en la situación. Por ejemplo, en un diario se presenta el resultado de una encuesta:

¿CUÁL FUE EL ÚLTIMO LIBRO QUE LEÍSTE?



A partir de esta imagen es posible plantear diversas preguntas que promuevan la interpretación: *¿Qué tipo de libros son los más leídos? ¿Cuántos chicos respondieron a la encuesta?*, o bien *La bibliotecaria quiere hacer un pedido para comprar 50 nuevos libros, ¿le sirve la información del gráfico para decidir la compra? ¿Cómo?* Otro tipo de actividades que se puede proponer en 5° año/ grado son aquellas donde es necesario pasar la información de una forma de presentación a otra, como por ejemplo la siguiente.

• En un negocio de venta de ropa, se realiza el control mensual de las ventas de cada tipo de mercadería. En el siguiente gráfico, se presentan las ventas de diferentes tipos de remeras durante un mes.



a) ¿Cuántas remeras se vendieron ese mes?
b) ¿Cuánto dinero se recaudó por la venta de remeras?
c) ¿Podrías mostrar esta misma información en una tabla?
d) ¿Cuál de las representaciones muestra más rápidamente las diferencias?
e) Si un empleado del negocio mira el gráfico y realiza la siguiente cuenta: 12 x 10 + 6 x 30, ¿qué pregunta le pueden haber hecho?
f) ¿Podrías trasformar los datos de esta tabla en un gráfico o gráficos como los que usan en este negocio?

Cantidad de remeras vendidas en una semana					
	Lunes	Martes	Miércoles	Jueves	Viernes
1ª marca	23	26	17	0	12
2ª marca	12	9	18	0	2
3ª marca	3	5	7	8	10

Además de analizar la información, aquí interesa discutir qué tipo de presentación resulta más adecuada para las necesidades de quien organiza esa información.

Al seleccionar los gráficos que se incluyan en las propuestas es conveniente considerar que las variables representadas sean conocidas por los alumnos o estén siendo estudiadas en el área de Ciencias Sociales y Ciencias Naturales.

nap

El reconocimiento y uso de relaciones espaciales y de sistemas de referencia.

El reconocimiento de figuras y cuerpos geométricos y la producción y el análisis de construcciones, considerando las propiedades involucradas.

La comprensión del proceso de medir, considerando diferentes expresiones posibles para una misma cantidad.

El análisis y uso reflexivo de distintos procedimientos para estimar y calcular medidas.

Geometría y Medida

Geometría y Medida

Los saberes que se ponen en juego

Para que los alumnos puedan aprender los saberes incluidos en los Núcleos de Aprendizajes Prioritarios en la escuela, tendremos que proponer situaciones de enseñanza en las que se pongan en juego distintos aspectos de los mismos. Se trata de que los conocimientos matemáticos se introduzcan en el aula asociados con los distintos problemas que permiten resolverlos, para luego identificarlos y sistematizarlos. Esto es:

- Ubicar objetos en el espacio y/o sus representaciones en el plano en función de distintas referencias.
- Interpretar y elaborar croquis teniendo en cuenta las relaciones espaciales entre los elementos representados.
- Describir, reconocer y comparar triángulos, cuadriláteros y otras figuras teniendo en cuenta la longitud y posición relativa de sus lados y/o diagonales, la amplitud de sus ángulos.
- Describir, reconocer, comparar y representar cuerpos identificando la forma y el número de caras.
- Clasificar figuras de diferentes formas explicitando los criterios utilizados.
- Copiar y construir figuras (triángulos, cuadriláteros, círculos, figuras combinadas) a partir de distintas informaciones (instructivo, conjunto de condiciones, dibujo) mediante el uso de regla, escuadra, compás y transportador y evaluando la adecuación de la figura obtenida a la información dada.
- Componer y descomponer figuras utilizando propiedades conocidas de las figuras iniciales para argumentar sobre las de las figuras obtenidas.
- Analizar afirmaciones[1] acerca de propiedades de las figuras y argumentar sobre su validez.

[1] La complejidad de la tarea estará dada por el repertorio de figuras y propiedades involucradas, promoviendo el avance desde comprobaciones empíricas (plegados, superposiciones, comparación de dibujos o usando regla o compás, mediciones) hacia argumentaciones más generales, utilizando propiedades conocidas.

- Estimar y medir efectivamente cantidades eligiendo el instrumento y la unidad[2] en función de la situación.
- Comparar distintas formas de escribir una misma cantidad utilizando distintas expresiones (descomposiciones aditivas, distintas unidades).
- Calcular cantidades evaluando la razonabilidad del resultado y la pertinencia de la unidad elegida para expresarlo.
- Elaborar y comparar procedimientos[3] para calcular áreas y perímetros de figuras.
- Comparar figuras analizando cómo varían sus formas, perímetros y áreas cuando se mantiene alguna o algunas de estas características y se modifica/n otra/s.

Propuestas para la enseñanza

En este apartado, intentamos precisar el alcance y el sentido de los conocimientos que se priorizan en el Eje "Geometría y Medida". Para ello, proponemos algunos ejemplos de actividades para desarrollar en el aula y de producciones de los niños. Además, presentamos secuencias de actividades que muestran el tipo de trabajo matemático propuesto desde el enfoque explicitado en el inicio de este *Cuaderno*.[4]

Para establecer y representar relaciones espaciales

En esta etapa, los niños ya han elaborado ciertas concepciones ligadas al conocimiento del espacio. Por ejemplo, pueden interpretar y describir trayectos o posiciones de objetos en el espacio y en el plano usando referencias, y están en condiciones de identificar códigos de señalización en distintos mapas e interpretar algunos planos sencillos.

Ahora bien, las características particulares de los ámbitos que frecuentan los niños inciden en el tipo de relaciones y referencias que construyen respecto de las nociones espaciales. Así, los conocimientos que pudieran haber construido los alumnos provenientes de sectores rurales, seguramente serán diferentes de

[2] Para el caso de la longitud, la capacidad y el peso se incluirán unidades convencionales de uso corriente. Para la amplitud de un ángulo, se introducirán grados. Para áreas, se incluirán unidades no convencionales, el cm^2 y el m^2.

[3] Se presenta la comparación de procedimientos elaborados por los alumnos y de estos con otros como iteración de una unidad y descomposición en figuras conocidas.

[4] **Recomendación de lectura:** en reiteradas ocasiones, se propondrán actividades a partir de lo que se ha realizado en el año/grado anterior. En los casos en que los chicos no hayan realizado dicho trabajo u otro similar, es conveniente consultar *Cuadernos para el aula: Matemática 4* para que, en función de los conocimientos del grupo, el docente decida cómo adaptar la propuesta que allí se incluye.

los que habitan en ciudades y estos, a su vez, tendrán características diferenciadas entre sí, según las experiencias y el tipo de reflexión sobre las mismas que hayan tenido en la escuela.

A partir de esta diversidad, que será importante capitalizar, nuestra intención es que los alumnos dispongan de los conocimientos necesarios para desempeñarse en distintos contextos. Apuntamos a enriquecer las concepciones iniciales de los niños, proponiendo actividades en las que sea necesario comunicar información sobre el espacio cotidiano y sobre otros espacios conocidos a través de sus representaciones, para poner de relieve que los conocimientos espaciales posibilitan anticipar y controlar los efectos de las acciones sobre el espacio. Así, los distintos planos y sus diferentes referencias, los croquis, las hojas de ruta, etc., son instrumentos fundamentales sobre los cuales pensar las actividades.

La propuesta para 5º año/grado es continuar con actividades que impliquen la interpretación y la descripción de posiciones y recorridos en el espacio y en el plano, incluyendo ahora la producción de representaciones por los chicos. En este sentido, retomamos el trabajo sobre la identificación e interpretación de códigos de señalización en mapas viales y hojas de ruta, incorporando el establecimiento de nuevas relaciones a partir de la combinación de información obtenida de estas fuentes de datos. En el caso de los planos de ciudades que no pertenecen al entorno cercano a los niños, se incluye el estudio de referencias relacionadas con la numeración y sentidos de las calles, a partir de un trabajo fuerte de producción.

Plantear situaciones para producir e interpretar representaciones del espacio bi y tridimensional

En los *Cuadernos para el aula* de años anteriores se proponen diferentes situaciones con el objetivo de que los alumnos se involucren en un trabajo que les permita ir ampliando progresivamente los conocimientos que, según las características de su entorno, han construido por la sola interacción con el medio que los rodea.

En este sentido, se intentó propiciar básicamente que los alumnos establezcan relaciones entre el espacio real y sus diferentes representaciones bidimensionales.

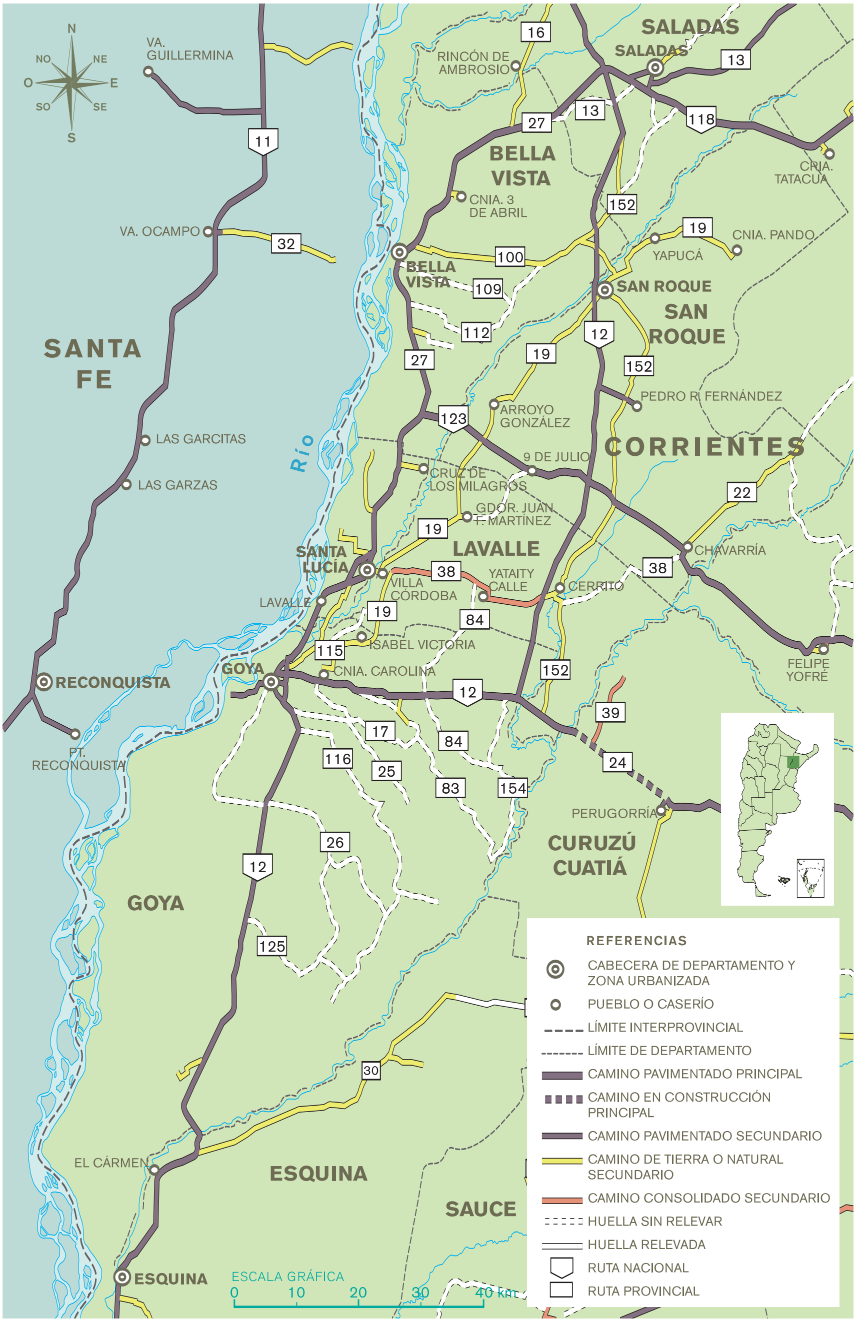
La interpretación y producción de croquis, mapas y planos requiere desarrollar procedimientos específicos de análisis y selección de información distintos de los que se utilizan para otros portadores. Esto puede advertirse al comparar las actividades que siguen con las que se desarrollan en el apartado “Para trabajar con la información” en el Eje “Número y Operaciones” de este *Cuaderno*.

La propuesta para 5º año/grado consiste en continuar el estudio de distintas **representaciones del espacio**[5], incorporando problemas que requieran diferenciar y precisar la información que brindan los mapas, los croquis o los planos y establecer relaciones entre datos en la resolución de problemas de distinto tipo.

Para ello, comenzaremos por plantear el trabajo simultáneo con una hoja de ruta y un mapa rutero de una misma zona. Podemos organizar la clase en parejas y entregar a cada una de ellas una copia de la hoja de ruta y del mapa rutero[6], como los de las páginas siguientes, con esta consigna.

• Respondan a las preguntas e indiquen de dónde obtuvieron los datos para responder.
a) ¿Cuántos kilómetros del trayecto se recorren sobre la ruta Nº 27?
b) ¿Qué parte del trayecto Esquina-Saladas podría ser realizado en una hora? ¿Y en media hora?
c) ¿Se podría saber, a partir de la hoja de ruta, dónde hay un cruce de rutas? ¿Por qué?
d) ¿Cuánto tiempo podría tardarse en recorrer el trayecto desde la ciudad de Goya hasta el cruce de la Ruta 19 con la 123? Realicen una aproximación.

[5] **Recomendación de la lectura:** en el apartado “Las representaciones” de este *Cuaderno*, se analiza la relación entre las representaciones producidas por quien resuelve, las realizadas por otros compañeros y las convencionales.
[6] En el sitio de Internet www.ruta0.com/rutas_argentinas.asp, se encuentran mapas similares.


SANTA FE
CORRIENTES
SALADAS
BELLA VISTA
SAN ROQUE
LAVALLE
GOYA
ESQUINA
SAUCE
CURUZÚ CUATIÁ
Río
VA. GUILLERMINA
VA. OCAMPO
LAS GARCITAS
LAS GARZAS
RECONQUISTA
PT. RECONQUISTA
RINCÓN DE AMBROSIO
CNIA. 3 DE ABRIL
YAPUCÁ
CNIA. PANDO
CRIA. TATACUA
PEDRO R. FERNÁNDEZ
ARROYO GONZÁLEZ
9 DE JULIO
CRUZ DE LOS MILAGROS
GDOR. JUAN E. MARTÍNEZ
SANTA LUCÍA
VILLA CÓRDOBA
YATAITY CALLE
CERRITO
CHAVARRÍA
LAVALLE
ISABEL VICTORIA
CNIA. CAROLINA
FELIPE YOFRÉ
PERUGORRÍA
EL CÁRMEN
ESCALA GRÁFICA
0 10 20 30 40 km
REFERENCIAS
CABECERA DE DEPARTAMENTO Y ZONA URBANIZADA
PUEBLO O CASERÍO
LÍMITE INTERPROVINCIAL
LÍMITE DE DEPARTAMENTO
CAMINO PAVIMENTADO PRINCIPAL
CAMINO EN CONSTRUCCIÓN PRINCIPAL
CAMINO PAVIMENTADO SECUNDARIO
CAMINO DE TIERRA O NATURAL SECUNDARIO
CAMINO CONSOLIDADO SECUNDARIO
HUELLA SIN RELEVAR
HUELLA RELEVADA
RUTA NACIONAL
RUTA PROVINCIAL

Mapa rutero.

Hoja de ruta.

Trayecto Esquina-Saladas:
238 km.
Para este trayecto se calculan 2 hs 10 min, aproximadamente, tomando como velocidad promedio 110 km, que es la velocidad permitida en ruta.

Consumos calculados para vehículos nafteros:

Rendimiento: 10 km por cada litro de nafta.

Valores de referencia: $ 1,99 cada litro de nafta.

Costo del recorrido: $ 47 ($ 47 en combustible y $ 0 en peajes).

Las primeras tres preguntas ponen en juego la interpretación de una sola de las representaciones, la hoja de ruta. Al respecto, es posible propiciar la discusión acerca de qué información aporta y de qué manera. Por ejemplo, un cruce de rutas está indicado como punto redondeado sobre la línea de trayectoria, tal como en las localidades.

También se incluye la velocidad promedio permitida y las distancias entre localidades, lo que posibilita la estimación del tiempo para recorrer cada fracción del trayecto. Las discusiones que generan las preguntas contribuyen a que los alumnos puedan reconocer, entre los datos que proporcionan un mapa y una hoja de ruta, algunos rasgos comunes, como el nombre de las localidades y algunas diferencias. Por ejemplo, la hoja de ruta es una representación lineal que no permite visualizar la localización de las ciudades en el espacio geográfico ni otras conexiones ya que, por ejemplo, en la localidad de Goya hay un cruce entre la ruta Nº 12 y la Nº 27 que no se indica y puede verse en el mapa. La pregunta d) demanda relacionar información, ya que estimar la distancia que representa un trayecto del que se desconoce la longitud requiere comparar en el mapa el trayecto solicitado con algún otro del que se conozca la longitud a partir de la hoja de ruta. Aquí el pedido es de una aproximación, puesto que se pretende que los alumnos hagan estimaciones comparando longitudes de trayectos parecidos. En este caso, el trayecto desde Goya hasta el cruce de la ruta 27 con la 123 puede servir, pues tiene una forma y una longitud similar, y como está cerca del cruce anterior facilita la comparación.

Luego de este análisis, es posible proponer la siguiente consigna, también para realizar en parejas, que involucra la construcción de otra hoja de ruta obteniendo los datos del mismo mapa rutero.

- Elaboren una hoja de ruta del trayecto Goya-9 de Julio, utilizando la información que puedan obtener del mapa y de la hoja de ruta. Identifiquen en ella cuál es la información exacta y cuál la aproximada.

Aquí será necesario discutir con los alumnos si pudieron obtener toda la información que es necesario dar en una hoja de ruta y el carácter de la misma (si es aproximada o exacta) y precisar qué tomaron como referencia para realizar las aproximaciones de distancias entre diferentes puntos.

Una propuesta que permite enriquecer las referencias del espacio que proporcionan los mapas comunes son las imágenes satelitales. El programa de computación llamado *Google Earth*[7] permite visualizar imágenes de cualquier

[7] Se recomienda colocar el nombre *Google Earth* en un buscador y bajar el programa en forma gratuita de alguna de las páginas que allí aparecerán. En principio, para que este programa pueda bajar bien, es necesario contar con una conexión *on line*, de lo contrario la búsqueda demora mucho tiempo.

punto del planeta. Ingresando el nombre de la localidad que se desea explorar, los alumnos podrían identificar puntos que les resulten conocidos y buscar nuevos lugares a partir de los mismos, identificando las referencias del espacio que a ellos les resulten conocidas.

Un avance respecto del trabajo con planos de ciudades podría plantearse a partir de la siguiente actividad.

• Este mapa muestra el centro de la ciudad de Corrientes. Sabiendo que la numeración de la calle Quintana, entre España y Santa Fe, está entre el 1600 y el 1700, y que la numeración de la calle Catamarca, entre 25 de Mayo y C. Pellegrini, está entre el 600 y el 700, resolvé las consignas siguientes.

a) Indicá la cuadra que corresponde a Salta al 1100.
b) Indicá la cuadra que corresponde a Junín al 400.
c) ¿Cuál es la numeración de las calles a orillas del río?

Los croquis[8] son un tipo de representación que interesa estudiar en la escuela, pues como proporcionan un esquema estimativo de la realidad que se quiere representar, abren la posibilidad de que sean los alumnos quienes deban realizar las representaciones, avanzando en la precisión de las referencias necesarias.

Una particularidad de las zonas rurales es que hay pocas referencias convencionales a las cuales apelar y los alumnos suelen considerar únicamente referencias muy ligadas a sus experiencias personales. En consecuencia, plantear a los chicos qué referencias serían las más pertinentes para dar a quien no conoce el lugar podría promover la descentración requerida.

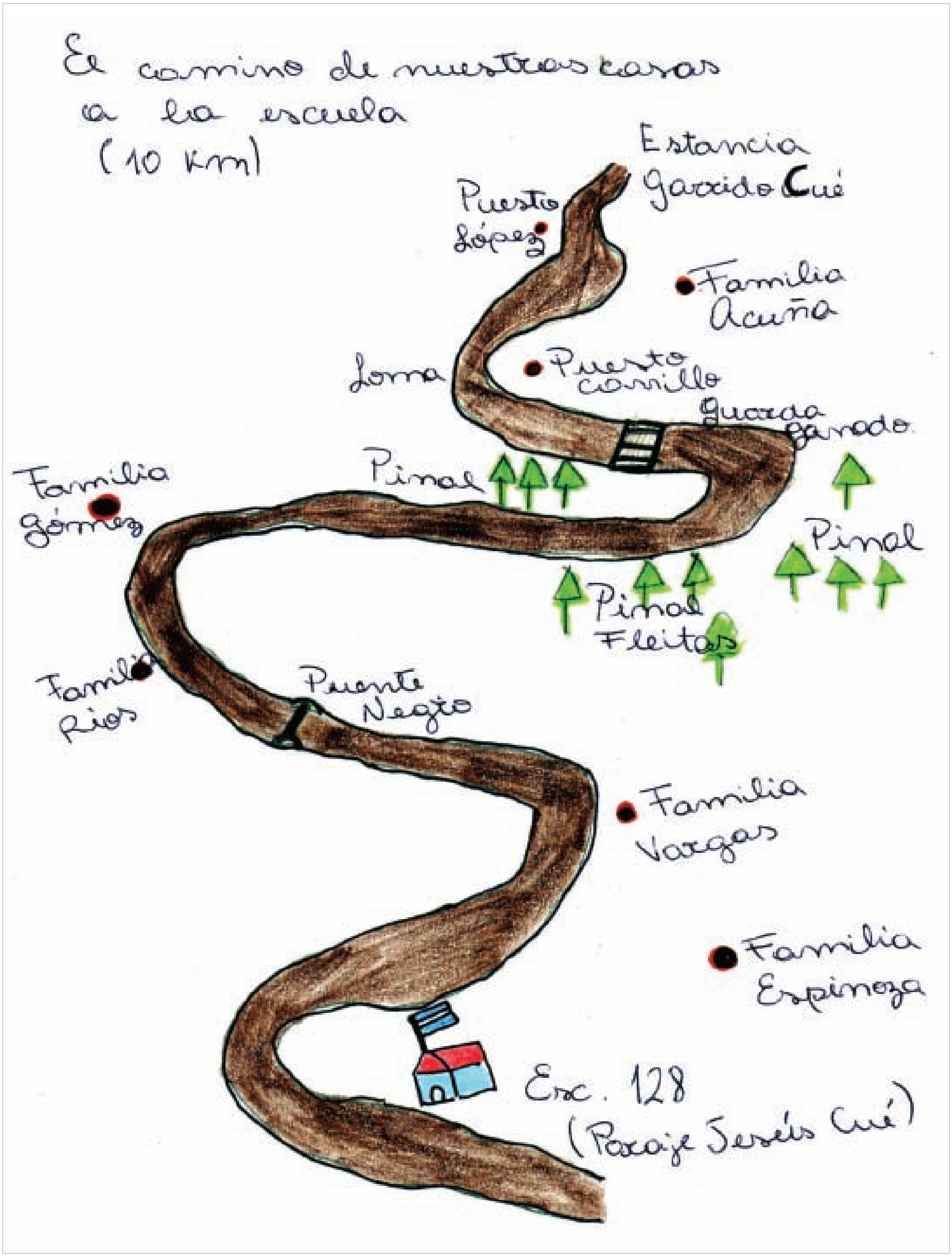
Es interesante subrayar que los niños deben disponer de los conocimientos necesarios para desempeñarse en distintos espacios, más allá de los propios conocimientos de origen. Podríamos suponer que la producción de un croquis de un paraje rural que no se conoce es una tarea difícil para algunos niños de la ciudad y del mismo modo podría ocurrir con los alumnos de un determinado paraje rural al hacer un croquis de un itinerario de la ciudad. Sin embargo, todos pueden realizar tareas de interpretación de dichas representaciones, aunque describan espacios desconocidos. Es más, es necesario que se familiaricen con ellos. Este trabajo permitirá analizar con los alumnos las diferencias que estos bocetos ponen en juego. Por ejemplo, ¿cuáles serían las referencias significativas del campo para alguien que no pertenece a este contexto? ¿Y cuáles son las referencias pertinentes para orientar a alguien en una ciudad?

A continuación, analizamos un registro de clase de una actividad desarrollada a partir del croquis “El camino de nuestras casas a la escuela”[9].

---

8 **Recomendación de lectura:** véase *Cuadernos para el aula: Matemática 4*, donde se presenta una experiencia de elaboración de croquis muy interesante denominada “De la meseta al valle”, realizada en una escuela de la provincia de Río Negro.

9 Actividad desarrollada en el marco del Proyecto “Sembrando Horizonte", para escuelas de plurigrado, elaborado y puesto en práctica por el Equipo Técnico de la Asesoría Pedagógica del Consejo General de Educación de la provincia de Corrientes. El croquis fue elaborado por alumnos de la Escuela Rural N° 128 (paraje Jesús Cué) de la localidad de Gobernador Virasoro, provincia de Corrientes.


El camino de nuestras casas a la escuela
(10 km)
Estancia Garrido Cué
Puesto López
Familia Acuña
Loma
Puesto carrillo
Guarda ganado
Pinal
Familia Gómez
Pinal
Pinal Fleitas
Familia Ríos
Puente Negro
Familia Vargas
Familia Espinoza
Esc. 128
(Paraje Jesús Cué)

Registro de clase

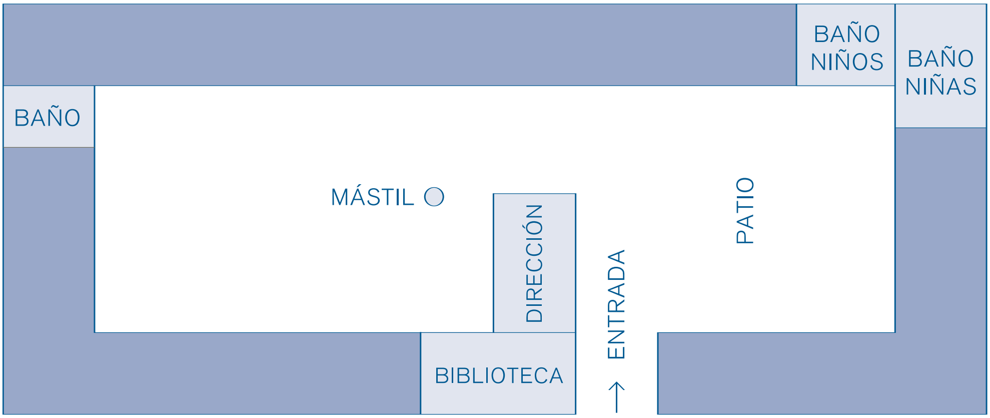
Maestro: –*Chicos, dijimos que tenían que armar un croquis para que alguien que no conoce Jesús Cué sepa dónde están sus casas y dónde está la escuela. Les voy a entregar la copia de un trabajo de uno de los grupos y analicen si cualquiera lo va a entender. Si les parece que hay algo que no está bien, piensen cómo habría que cambiarlo.*
(Los alumnos trabajan en grupo, marcan errores y sugieren algunos cambios.)
Maestro: –*Bueno, ¿vamos a ver qué vieron en el trabajo? ¿Encontraron algo que no está claro?*
Alumno 1: –*Sí, maestro, ahí ponen pinal*[10] *de Fleitas, y hay muchos pinales acá, ¿cómo va a saber un señor cualquiera cuál es el de los Fleitas?*
Maestro: –*¿Los demás también marcaron esto como un error? ¿Les parece que está mal?*
Alumno 2: –*Pero si no ponemos el pinal, no se va a ubicar el señor. El pinal es regrande, se ve rebien.*
Alumno 1: –*Sí, maestro, pero yo digo que no se sabe cuál es el pinal de Fleitas, porque no hay cartel que diga "FLEITAS".*
Maestro: –*¿Qué piensan los demás?*
Alumno 3: –*El pinal hay que poner.*
Maestro: –*Sí, pero ¿y eso que dice Fede, que nadie sabe cuál es de Fleitas y cuál no? ¿Cómo lo solucionamos?*
Alumno 4: –*Tenemos que poner el pinal pero no que es de Fleitas.*
Alumno 1: –*Nosotros decíamos que se puede poner también la casita que está al lado del pinal de Fleitas para que se sepa cuál es.*
(La discusión sigue.)

De este fragmento vale destacar la importancia de retomar las producciones de los alumnos para poder corregirlas y mejorarlas incorporando nuevas referencias. Además, la muy buena decisión del maestro de centrar la discusión en uno de los trabajos de los alumnos, con el fin de posibilitar la discusión de todo el grupo sobre problemas particulares y comunes, y así buscar soluciones concretas que sirven a los alumnos para corregir luego sus trabajos.

[10] En este registro se respetó la forma de expresión de los alumnos al referirse a un *pinar* con *l* al final, en lugar de *r*.

Para avanzar sobre la interpretación y la producción de representaciones, es necesario imponer ciertas condiciones sobre el espacio representado o a representar, por ejemplo, trabajando en forma grupal sobre un croquis.

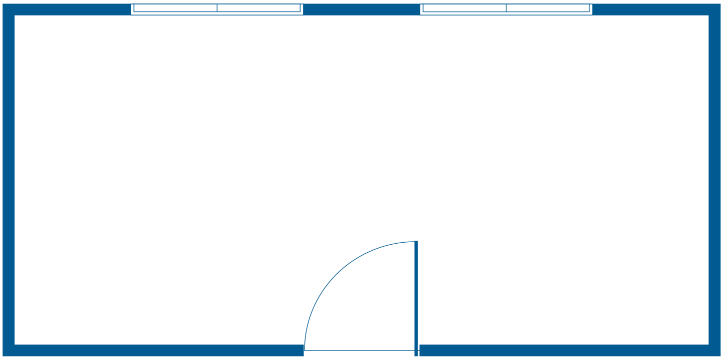
• La Cooperadora de una escuela de EGB 1 y EGB 2, junto con el Ministerio de Educación, acaba de terminar la construcción de una parte de la escuela. Quieren ubicar en el ala derecha a los alumnos del Primer Ciclo. Se sabe que hay 2 secciones de cada año y que quieren que los de un mismo año estén cerca, pero que los de 1er año sean los que estén más cerca del baño. Ubiquen, en el siguiente croquis, los cursos correspondientes a los dos ciclos colocando las paredes que separan las aulas.



Una variación de este mismo tipo de situación podría introducirse modificando las condiciones, como por ejemplo: *Marquen en este croquis aulas para 7 grados, una sala de música y un salón de usos múltiples ubicado cerca de la sala de música y con una puerta hacia el patio.*

Se podría aprovechar el mismo contexto de construcción de una nueva escuela para plantear la localización de representaciones de objetos en el mismo. Por ejemplo, cada alumno puede realizar la siguiente actividad de manera individual, para luego comparar si hubo diferencias entre las producciones. Se podrían distribuir fotocopias con el esquema de una sala de computación y videos y dar la consigna en forma oral.

• La directora y la vicedirectora quieren ordenar los equipos y muebles que van en este lugar de la siguiente manera: 5 computadoras a la derecha de la puerta de entrada y bien pegadas a la pared. A la izquierda de la puerta de entrada, y también pegada a la pared, una mesa rectangular. En la esquina que está al terminar esta pared quieren ubicar la TV y, debajo de esta, la reproductora de videos. Entre las dos ventanas quieren ubicar otras 2 computadoras. En el centro de la sala, desean ubicar una mesa redonda. Hagan, en forma individual, un croquis donde se observe cómo quedaría la sala.



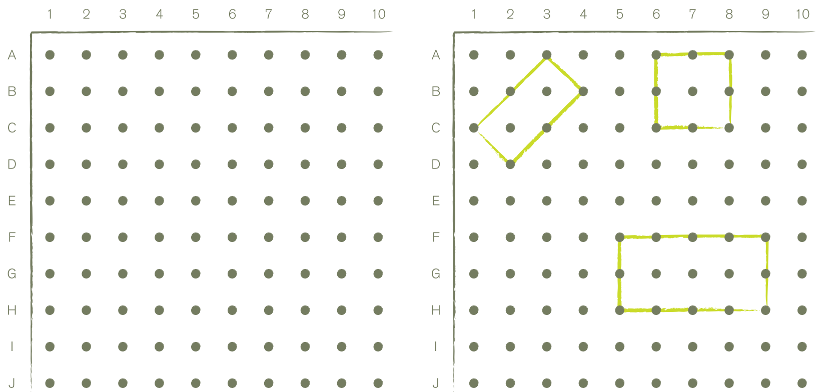
También es posible incluir la descripción de un recorrido, por ejemplo a partir de una situación de comunicación en la que preguntemos: *¿Cual podría ser una manera fácil de explicarles a los padres, que entran por la puerta de entrada de la escuela para asistir a la reunión de padres, cómo llegar hasta el aula de 5°?*

Es interesante vincular las actividades en las que se trabaja con representaciones del espacio real con propuestas del área de Ciencias Sociales, en el Eje "Las sociedades y los espacios geográficos". Se podrían presentar planos de rutas y mapas nacionales para localizar circuitos productivos, analizar las redes de transporte terrestre, ferroviario, etc. También es posible presentar planos de distintas localidades para analizar el uso del suelo urbano.

Plantear situaciones para ubicar posiciones en función de distintas referencias

Para 5º año/grado, la propuesta es profundizar el estudio de referencias para la **ubicación de puntos en el plano**. Para aproximar a los chicos a las condiciones del sistema de ejes cartesianos es posible, por ejemplo, plantear el siguiente juego de la "Batalla geométrica"[11].

"Batalla geométrica": ubicar puntos en el plano.
Organización de la clase: se divide en grupos de 4 alumnos, los que a su vez se subdividen en parejas.
Materiales: dos tableros por cada pareja de alumnos. Uno, entregado por el docente, con las figuras que la otra pareja tiene que adivinar, y otro tablero vacío, para que puedan tener un registro de lo que dictan a la pareja rival para adivinar la posición de sus figuras. Cada una de las figuras debe tener entre uno y cinco puntos interiores y no pueden tocarse ni superponerse.



Desarrollo: el objetivo del juego es descubrir dónde están ubicadas cada una de las tres figuras que dibujó el otro jugador. Para esto, por turno, los jugadores deben ir diciendo posiciones (A1, B3, etc.) para ubicar la figura y anotar en el tablero vacío, según lo que los contrincantes respondan. Gana el que primero descubre la posición exacta de las tres figuras.

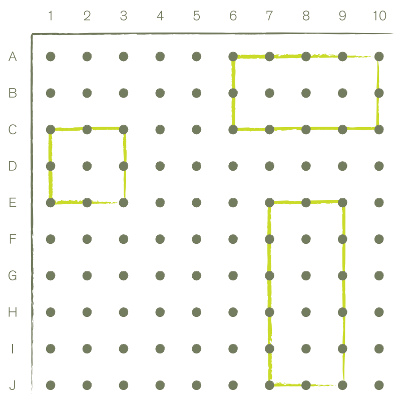
[11] **Recomendación de lectura:** véase *Cuadernos para el aula: Matemática 4*, donde se presenta, para el estudio de la ubicación de posiciones, la "Batalla naval" y su variante, la "Batalla geométrica".

Es conveniente que, para que todos comprendan en qué consiste la actividad, juguemos algunas partidas frente a los alumnos. Cabe destacar que saber que lo que se tiene que adivinar es un cuadrado o un rectángulo constituye una información valiosa a la hora de decidir qué referencias dar y que, por lo tanto, no hace falta identificar todos los vértices. Según las decisiones que tomemos en relación con el tipo y la cantidad de figuras, la cantidad de puntos interiores, las posiciones en el plano, la distancia de los lados a la primera fila y/o columna, la tarea podría ofrecer distintos niveles de complejidad. Otro aspecto a considerar es el vocabulario que se va utilizar. En el caso de la “Batalla naval”, se habla de ***averiado/tocado, hundido*** o ***agua***; aquí podría decirse: ***vértice, lado, adentro*** o ***afuera,*** según el punto nombrado pertenezca a un vértice, a un lado o sea interior o exterior a la figura.

Luego del juego en parejas, podríamos organizar un trabajo individual, con el objetivo de enfrentar a todos los alumnos con alguna situación especialmente pensada para discutir determinadas cuestiones que no están garantizadas por el solo hecho de jugar, y también para asegurarnos de que todos los alumnos participen. Por ejemplo, podríamos entregar un tablero con figuras en posiciones que no se hayan presentado antes, proponiendo a los chicos que registren en sus cuadernos las referencias necesarias para ubicar cada una de las figuras dadas.

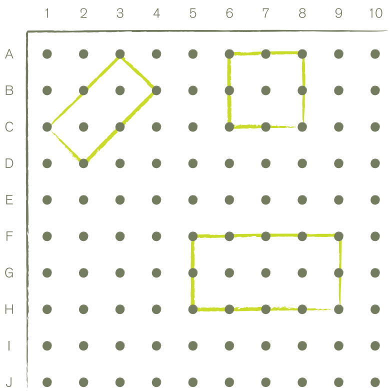
Otra actividad individual es controlar lo que alguien dijo para adivinar las figuras. Para esto, deberíamos entregar tableros con figuras y ciertas conclusiones a partir de determinadas referencias, y luego solicitar a los alumnos que determinen si son correctas o no. Por ejemplo, con la siguiente actividad.

1. Analizá las conclusiones de Marisa a partir del siguiente tablero y determiná si son o no correctas. Fundamentá tu respuesta.



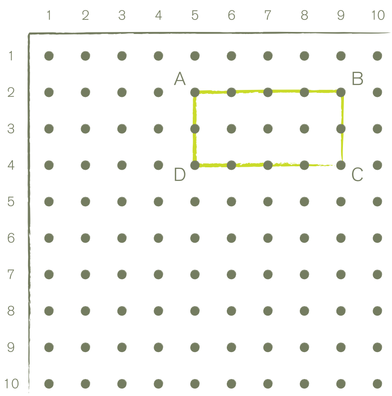
Marisa dijo que adivinó la figura cuando supo que C6, A6 y C10 son vértices, porque el único que cumple con esas condiciones es el rectángulo que deja 3 puntos interiores. Además, dijo que se dio cuenta de otra de las figuras cuando Juan respondió vértice en C1 y C3 y lado en D1 y D3, ya que no podía ser otro más que un cuadrado.

2. Juana recibió el siguiente tablero:



a) Cuando Martín dijo *B6,* Juana le contestó *lado* y cuando dijo *A6* y *C8*, Juana le respondió ***vértice***. Indicá qué pudo haber dicho Martín para encontrar los otros vértices de la figura.
b) Martín dijo *C1* y *D2* y Juana le contestó ***vértice***. Si ahora Martín dice *C3*, porque cree que es un vértice, ¿qué figura considera que encontró?

Para avanzar hacia las convenciones propias del sistema cartesiano es posible discutir con los alumnos cómo ubicar los puntos en el tablero si en lugar de referencias con letras y números se usan solo números.



3. ¿Da lo mismo decir primero 2 y después 5 que hacerlo en el orden inverso para ubicar el punto A? ¿Cómo se pueden anotar las posiciones de los vértices del rectángulo?

Sistematizar los acuerdos alcanzados permitirá una primera aproximación al uso de coordenadas del tipo (2;5).

Para avanzar en el conocimiento de las figuras y de los cuerpos

Las primeras aproximaciones a las figuras y a los cuerpos tienen lugar en el Primer Ciclo, a partir de un trabajo apoyado fundamentalmente en la percepción. Así, los niños están en condiciones de diferenciar una figura de otra, pero no son capaces, por ejemplo, de comprender la inclusión del cuadrado entre los rectángulos. En este sentido, debemos reconocer que ciertas propiedades no son “observables” a partir del dibujo, es necesaria cierta actividad intelectual para que se hagan evidentes, y dado que lo que cada alumno “ve” está en relación directa con los conocimientos que posee. Tener en cuenta que los dibujos no “muestran” las propiedades que queremos hacer aprender a los alumnos, representa un aspecto importante que debemos tener en cuenta en el momento de pensar las actividades del Segundo Ciclo.

Otro aspecto a tener en cuenta en este Ciclo es que, para establecer si son ciertas o no algunas afirmaciones sobre las figuras[12], por ejemplo si son o no iguales los triángulos que se forman en un cuadrado al trazar la diagonal, los chicos podrán apelar a constataciones empíricas: *Los dos triángulos me quedaron iguales porque doblé el cuadrado en dos partes,* o a propiedades de las figuras que van conociendo: *Los dos triángulos son iguales porque todos los lados del cuadrado son iguales.*

Para que al argumentar los alumnos avancen hacia el uso de propiedades, es necesario que enfrenten problemas en los que tengan que anticipar y dar razones sobre, por ejemplo, la figura que se obtiene al realizar una construcción.

En 5º año/grado trabajaremos para que los alumnos sistematicen las propiedades que seguramente han explorado en años anteriores, las de los lados y ángulos de triángulos y cuadriláteros, y se inicien en el estudio de las propiedades de las diagonales de los cuadriláteros. En el caso de los cuerpos, en 5º año/grado, profundizamos el estudio de prismas con propuestas que apunten a su caracterización a partir de las particularidades de sus bases.

Tal como se señaló en el apartado “Enseñar Matemática en el Segundo Ciclo” de este *Cuaderno*, el sentido de los conocimientos se construye a partir del conjunto de problemas que tales conocimientos resuelven. En el caso de las figuras, las construcciones permiten plantear problemas en los que se ponen en juego sus propiedades. Así, proponemos plantear, por ejemplo, la realización de construcciones a partir de la descripción elaborada por un grupo o a partir del copiado o a partir de ciertos datos.

Nótese que no se propone que el docente muestre cómo realizar los trazados para que el alumno los reproduzca, sino que sean los mismos alumnos los que, enfrentados al desafío de la construcción, anticipen cuáles son las informaciones necesarias para reproducir las figuras o establezcan relaciones entre los elementos del modelo a reproducir y resuelvan por sus medios el problema. En este sentido, el tipo de papel que se utilice, los instrumentos que se den, la cantidad de datos y la complejidad de la figura determinarán el uso de conocimientos diferentes para realizar la tarea.

---

[12] **Recomendación de lectura:** véase el apartado “La gestión de la clase”, en “Enseñar Matemática en el Segundo Ciclo” de este *Cuaderno*, donde se analiza cómo podrían desarrollarse las argumentaciones de los chicos.

Plantear situaciones para comparar y describir figuras y cuerpos

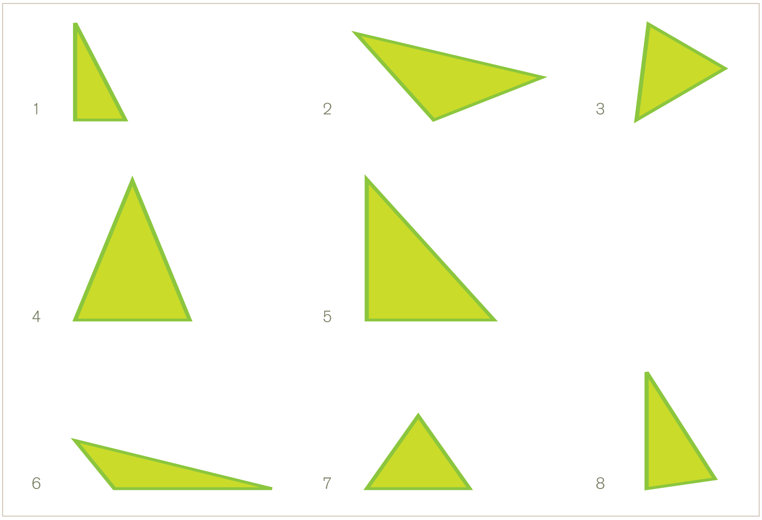
Entre las actividades que permiten trabajar la comparación y la descripción de figuras y cuerpos, se encuentran las que denominamos ***actividades de adivinanza***.[13]

En ellas, se presenta un conjunto de figuras o cuerpos y hay que descubrir cuál es la que alguien eligió. El que adivina tiene que plantear preguntas que permitan ir descartando las figuras o los cuerpos que no corresponden a las respuestas recibidas.

Puede que los alumnos ya hayan realizado esta propuesta, puesto que ya se incluyó en *Cuadernos* anteriores. Sin embargo, pueden ser nuevas las propiedades de las figuras y de los cuerpos con los que se va a trabajar.

Para el caso de las **figuras**, la comparación entre los triángulos del siguiente conjunto puede desembocar en la sistematización de las propiedades de sus lados y sus ángulos.

"Adivinanza de figuras"[14]: propiedades de los triángulos.
Materiales: hojas con triángulos dibujados.



[13] **Recomendación de lectura:** véase el documento de trabajo N° 5. *La enseñanza de la geometría en el Segundo Ciclo.* Subsecretaria de Educación de la Ciudad de Buenos Aires, Dirección de Currícula.

[14] Estas cartas, así como otras con diferentes figuras geométricas, están disponibles en Chemello, G. (coord.), Hanfling, M. y Machiunas, V. (2001), *Juegos en Matemática EGB 2. El juego, un recurso para aprender.* (Material recortable para alumnos). En la pág.17 del material para docentes, pueden encontrarse otras propuestas que permiten trabajar en el mismo sentido.

Organización de la clase: se divide en grupos de no más de 4 integrantes.
Desarrollo: se entrega a cada equipo una hoja con los triángulos. El juego consiste en adivinar cuál es la figura elegida por el docente, haciéndole preguntas que se respondan por sí o por no. Gana el equipo que primero encuentra la figura.

Las preguntas que los alumnos elaborarán, seguramente, serán de muy distinta índole. Por ejemplo, podrán preguntar: *¿Tiene lados iguales?* o *¿Tiene un ángulo recto?*, sin pensar en que algunas de esas propiedades son comunes a otras figuras del conjunto dado. O bien *¿Es el triángulo alargadito? ¿Es el triángulo gordo?*, es decir, preguntas que no se refieren a características geométricas. Cabe señalar aquí que para decidir si una figura se descarta o no en función de la respuesta del maestro, los chicos podrán realizar algunas comprobaciones empíricas, como comparar ángulos con la esquina de una hoja de papel para saber si son rectos o no, o realizar mediciones, pues no es suficiente con decidir "a ojo".

Un registro en el pizarrón de todas las preguntas que van formulando los alumnos puede ser un buen recurso para organizar la discusión posterior. Si bien la consigna indica que solo pueden formularse aquellas preguntas que se respondan por sí o por no, es muy probable que, inicialmente, algunas preguntas *(¿Cómo son sus lados? ¿Cuántos lados iguales tiene?)* no sean adecuadas, lo que requerirá una discusión grupal que permita realizar acuerdos al respecto. Por ejemplo, se podría concluir que las preguntas por *cuánto, cómo y dónde* no admiten como respuesta un sí o un no.

También habrá que realizar acuerdos básicos acerca de cuáles son las preguntas más útiles para determinar cuál es la figura seleccionada por el docente, lo que permite comenzar a identificar figuras que poseen una misma propiedad, como tener (o no) un ángulo recto o un par de lados iguales.

En una segunda instancia, se puede volver a jugar incluyendo en la consigna la condición de *elaborar la menor cantidad de preguntas posibles*. Es de esperar que, luego de las discusiones realizadas y de los acuerdos a los que se arribó, los alumnos estén en mejores condiciones para realizar otras actividades, como la siguiente.

• María y Martín dicen que eligieron el mismo triángulo. María dice que eligió un triángulo obtusángulo, en el que uno de sus lados mide 2,6 cm, y Martín dice que eligió un isósceles, en el que uno de sus lados mide 2,6 cm. ¿Es posible que sea cierto lo que afirman?

Es importante destacar aquí que para los niños no es evidente que un mismo triángulo pueda ser, a la vez, isósceles y obtusángulo.

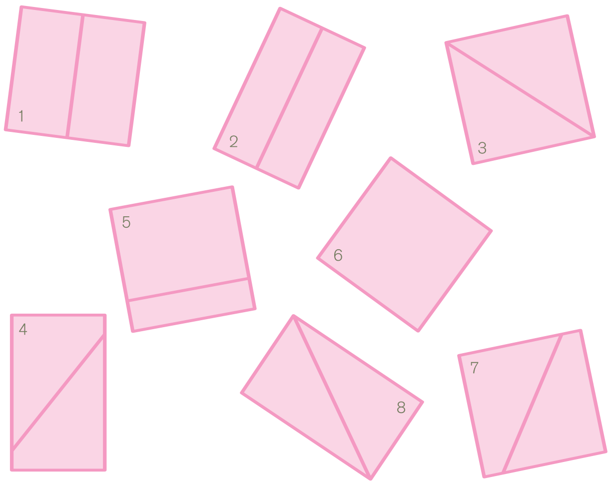
En el apartado "Plantear situaciones para sistematizar propiedades de los cuerpos y las figuras" de este *Cuaderno*, se proponen actividades para ahondar en el análisis de dichas caracterizaciones.

Las actividades de adivinanza se pueden plantear con diferentes conjuntos de figuras o cuerpos, según las propiedades de los mismos que se quieran trabajar y sistematizar posteriormente.

Por ejemplo, se podría trabajar con un conjunto de cuadriláteros de distintos tipos para retomar las propiedades ya exploradas: lados congruentes y ángulos rectos o no. Luego, para avanzar sobre otra propiedad, como el paralelismo de los lados, que diferencia a los paralelogramos de otros cuadriláteros, se podría indicar que no se puede preguntar por la congruencia de los lados. De este modo, la atención se dirige a los ángulos y las relaciones de perpendicularidad o no entre los lados. La noción de paralelismo entre dos lados podría surgir así ligada a la perpendicularidad de los mismos a un tercero.

A continuación se podrá proponer, por ejemplo, una actividad que permita discutir sobre la idea de diagonal de un cuadrilátero como la siguiente:

1. Dado el siguiente conjunto de figuras, elegí una y elaborá un listado de pistas que posibiliten adivinar la que seleccionaste.



2. Analizá las siguientes pistas y determiná si son suficientes para afirmar que la figura seleccionada es la 4.
- Es un rectángulo.
- Tiene una línea que lo atraviesa en su interior.
- La línea del interior no es paralela a los lados.

A través del planteo de esta actividad, pretendemos poner en discusión la definición de diagonal de un cuadrilátero, cuestionando ciertas formulaciones de los alumnos, tales como *Es un segmento que cruza por el medio de la figura* o *Es una raya torcida adentro del rectángulo*, depurando, de este modo, tanto el vocabulario empleado (*torcido, raya*) como el sentido mismo de los términos (a qué nos referimos cuando decimos *medio*). De esta manera, buscamos que se llegue a afirmar que la diagonal es un segmento que une dos vértices opuestos (o no consecutivos) de la figura. Es importante señalar que, si no se ha realizado antes una actividad como la de adivinanza de cuadriláteros, habrá que incluir alguna otra asociada, por ejemplo, a una construcción a partir de ciertos datos que suponga la exploración de la idea de paralelismo[15].

Para el caso de los **cuerpos**, si se trabaja con un conjunto de 6 prismas de la misma altura con las bases de distintas formas (rectángulo, cuadrado, hexágono, pentágono, triángulo, octógono), las discusiones posteriores al juego de adivinanza permitirán descubrir la relación entre la forma de la base y el número de caras laterales. Es decir, por ejemplo, si tiene bases hexagonales, el cuerpo tiene 8 caras, dos de ellas corresponden a las bases y las otras seis a los rectángulos de las caras laterales. Con el mismo conjunto de cuerpos, es posible también realizar otras actividades como la que se presenta a continuación.

1. Las siguientes preguntas fueron elaboradas por un grupo que dice que con esta lista pueden adivinar un prisma que eligió el maestro. Analizá con tu grupo las preguntas y respondé si es verdad que son buenas para adivinar y por qué.
¿Tiene 6 caras rectangulares?
¿Tiene 6 caras?
¿Tiene 5 caras?
¿Tiene caras triangulares?
¿Tiene 8 caras?
¿Tiene caras cuadrangulares?

[15] **Recomendación de lectura:** otras actividades sobre propiedades de las figuras geométricas se pueden consultar en Chemello, G. (coord.), Hanfling, M. y Machiunas, V. (2001), *Juegos en Matemática EGB 2. El juego, un recurso para aprender.* Material para docentes.

2. Rocío dijo que el cuerpo que ella eligió tiene 5 caras. ¿Es suficiente información para definir el cuerpo elegido por Rocío?

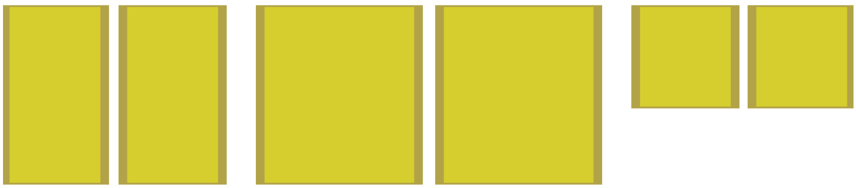
3. ¿Para cuál de los cuerpos sería suficiente saber la cantidad de caras para identificarlo? ¿Por qué?

Analizar la información que aporta cada pregunta pone en evidencia que si bien algunas son muy similares, dan informaciones diferentes, ya que un prisma puede tener 6 caras, pero no necesariamente todas rectangulares. En cambio, hay otras preguntas que, al parecer, son muy diferentes y, sin embargo, revelan los mismos datos. Por ejemplo, preguntar por la cantidad de caras que tiene el prisma (*¿Tiene 5 caras?*) o hacer preguntas referidas a la cantidad de lados que tienen las bases (*¿Tiene caras triangulares?*) es equivalente, porque ambos modos de formulación descartan los mismos cuerpos. En este caso, una respuesta negativa a cualquiera de las dos preguntas descartaría el prisma de base triangular.

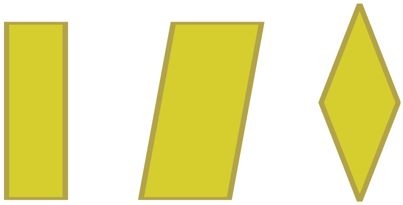
También es interesante debatir con los alumnos de qué manera la organización de las preguntas contribuye a asegurar un buen trabajo. Por ejemplo, si se formulan preguntas sobre la forma de las bases, para asegurarse un análisis exhaustivo se debería preguntar por todas las formas posibles para la base, y no como en el listado propuesto, ya que en este caso no se pregunta por el pentágono ni por el octógono.

Otras actividades relacionadas con la descripción y el análisis de las características de los prismas son las siguientes.

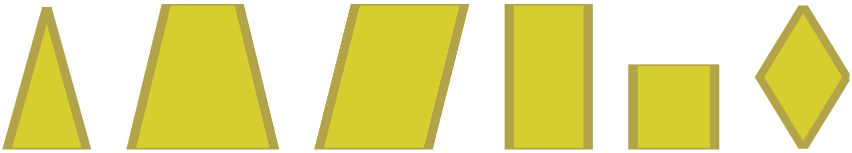
1. ¿Es posible construir un prisma utilizando las siguientes figuras como caras del mismo?



2. a) ¿Qué forma deberían tener las caras laterales de un prisma si su base fuera cada una de las siguientes figuras?



b) ¿Cómo podrían ser las caras laterales de un prisma si las bases son trapecios?
c) ¿Es posible construir prismas con cada una de las siguientes figuras como caras laterales?



Otras actividades que dan lugar a la descripción de figuras y cuerpos son aquellas en las que, dado uno de ellos, hay que elaborar un mensaje para que otro pueda reproducir una figura o un cuerpo exactamente igual. Se trata de una actividad muy interesante, ya que los niños deben poner en juego los conocimientos que tienen en relación con la figura o el cuerpo que están trabajando y explicitarlos. Aquí la exigencia de más o menos detalles, de más o menos precisión en la descripción, está regida por la necesidad de que, finalmente, las dos figuras puedan superponerse o los cuerpos sean iguales.

En particular, como la propuesta para este año es continuar el estudio de los cuadriláteros incluyendo las propiedades de sus diagonales, podremos presentar una secuencia de actividades de elaboración de mensajes, como la siguiente.

Secuencia para avanzar en el conocimiento de las figuras: "Las diagonales de los cuadriláteros"

Actividad 1

El docente plantea oralmente la siguiente consigna: *Cada grupo tiene que escribir un mensaje que contenga la información que sea necesaria sobre la figura que le tocó, formada por un rectángulo y un triángulo isósceles, como para que el otro grupo con el que forman equipo pueda construir la* *misma figura sin verla. Si al recibir el mensaje no entienden algo, pueden pedir aclaraciones por escrito. Cuando ambos grupos de cada equipo terminen, se van a reunir y van a comprobar si las figuras que realizaron pueden superponerse exactamente con las que recibieron. Si las figuras no coinciden, entre todos van a tratar de analizar dónde estuvo la falla.*

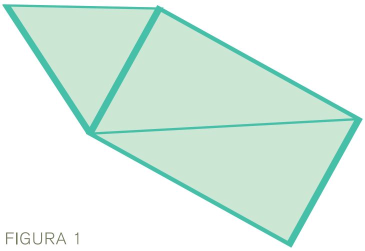


FIGURA 1

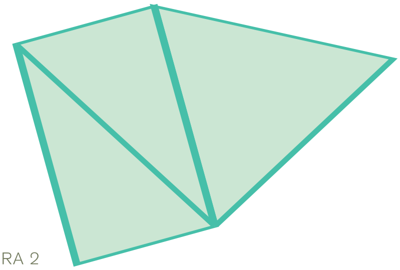


FIGURA 2

La clase se organiza en una cantidad par de grupos, la mitad de los grupos tendrán la figura 1 (un rectángulo con una diagonal trazada y un triángulo isósceles cuyo lado desigual es igual al lado menor del rectángulo) y la otra mitad de los grupos tendrá la figura 2 (el mismo rectángulo que en la figura 1 y un triángulo isósceles cuyo lado desigual es igual al lado mayor del rectángulo). Cada grupo con la figura 1 trabaja en equipo con otro grupo que recibe la figura 2.

Consideramos que las figuras presentadas deberían resultar relativamente sencillas de ser descriptas para los alumnos de 5° año/grado, dado que están formadas por otras dos muy conocidas para ellos: el rectángulo y el triángulo. Esto les posibilitará tener ciertos elementos para decidir qué información es importante proporcionar sobre cada una de ellas.

En la comparación de los diferentes mensajes, además de debatir la mejor manera de comunicar las posiciones relativas de las dos figuras entres sí *(El triángulo está "pegado" al rectángulo, está a la derecha del rectángulo, el lado menor coincide con el lado desigual del triángulo isósceles)*, se incorpora un elemento nuevo para los alumnos en relación con lo que se venía estudiando en años anteriores: las diagonales. Será conveniente, antes de proponer esta actividad, plantear alguna que permita precisar la idea de diagonal, como por ejemplo la presentada en la página 139.

En la confrontación, se podrá discutir cuál de las dos diagonales del rectángulo hay que construir en este caso, indicando la posición relativa de esta respecto de la configuración. Se verá en esta instancia la conveniencia de nombrar los vértices con letras para identificar cada una de las diagonales. Así la notación aparece de modo significativo en relación con la solución de un problema.

Actividad 2
En forma oral, el docente plantea la consigna siguiente: *Como ya hicieron antes, cada grupo va a escribir un mensaje que contenga la información necesaria sobre la figura que le tocó, como para que el otro grupo pueda construir la misma figura sin verla.*

FIGURA 1

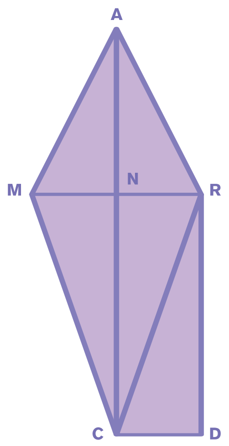
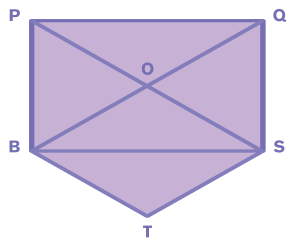


FIGURA 2



Se completará la información indicando que NRDC y PQSB son rectángulos y que ARCM es un romboide y OSTB es un rombo.

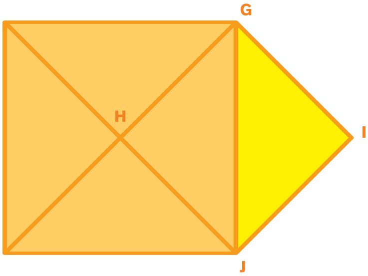
Para la confrontación de los mensajes, es interesante tener en cuenta que las configuraciones dadas abren, nuevamente, el debate acerca de las posiciones relativas entre sus elementos y posibilitan el perfeccionamiento del vocabulario matemático y las notaciones utilizados por los alumnos en sus comunicaciones.

Dado que en este caso las diagonales son lados de cuadriláteros, es posible proponer a los alumnos que utilicen las propiedades que conocen acerca de ellos (son iguales, son perpendiculares, etc.) para realizar afirmaciones sobre las propiedades de las primeras. Por ejemplo, para la figura 1, *Como el rectángulo tiene los cuatro ángulos rectos, las diagonales del romboide son perpendiculares* o, para la figura 2, *Como un rombo tiene pares de lados consecutivos iguales, las diagonales del rectángulo se cortan en el punto medio y son iguales entre sí.*

Actividad 3

Esta actividad tiene como propósito volver sobre las discusiones propiciadas en la anterior, a propósito de las propiedades de las diagonales: su perpendicularidad, igualdad, o si se cortan o no en el punto medio.

• Analicen la figura siguiente y respondan:



a) ¿Se puede asegurar que la figura HGIJ es un cuadrado, sabiendo que se construyó a partir de agregar al cuadrado naranja un triángulo amarillo igual a GJH? ¿Por qué?
b) Si la figura naranja fuera un rectángulo, ¿qué cuadrilátero se hubiera obtenido al agregar el triángulo amarillo? ¿Por qué?
c) ¿Y si la figura naranja fuera un rombo? ¿Qué figura se obtiene? ¿Por qué?

Transcribimos aquí un breve fragmento de registro de clase correspondiente a la actividad 2, que ilustra el tipo de discusión[16] que es posible propiciar desde las actividades de esta secuencia.

Registro de clase

Maestra: *–Chicos, atiendan esta parte del mensaje del grupo "las bellas"; ellas escribieron:* trazá las diagonales del romboide y luego desde el punto que se cortan construir un rectángulo. Los lados del rectángulo se enciman con las diagonales del romboide…
Ya estuvimos discutiendo sobre eso que ellas dicen se encima *y por qué no les salió bien la construcción, pero yo les quiero preguntar algo… ellas dicen…* construir un rectángulo. *Si este es un romboide, ¿siempre esta otra figura va a ser un rectángulo?*

[16] **Recomendación de lectura:** sobre la conducción de la puesta en común véase el apartado "La gestión de la clase", en "Enseñar Matemática en el Segundo Ciclo" de este *Cuaderno*.

Alumno 1: –*No, seño, ¿por qué?*
Alumno 2: –*Sí, seño.*
Maestra: –*Yo les estoy haciendo esa pregunta a ustedes. ¿Qué habría que mirar para asegurar que esta figura sea rectángulo? ¿Creen que siempre va a ser así? Piensen un poquito con su grupo… ustedes, chicas; ¿qué miraron para saber que es rectángulo? (Al grupo "las bellas".)*
Alumno 3: –*Miramos, nomás, seño.*
Alumno 4: –*Miramos, nomás, sí, pero tiene los ángulos rectos. Eso se ve.*
Maestra: –*Mmmm… ustedes miraron, nomás… pero tiene los ángulos rectos… Yo lo que pregunto es… ¿siempre que esta figura sea un romboide, esta otra va a ser un rectángulo?*
Alumno 2: –*Ahh… sí, seño, porque son derechitas las diagonales.*
Maestra: –*¿Cómo derechitas?*
Alumno 4: –*Él dice así, seño… (Hace señas con las manos.)*
Maestra: –*¿Y cómo se llama cuando se cortan así dos segmentos?*
(Silencio.)
Maestra: –*Son perpendiculares, quieren decir ustedes. Es lo mismo que decían recién las compañeras, que tiene ángulos rectos.*

Por lo que se puede observar en el registro, los argumentos que los chicos están en condiciones de dar están basados en la percepción y no son producto del análisis de las propiedades de las figuras; sin embargo, implican un primer acercamiento a las propiedades que queremos sistematizar. Este conocimiento sobre las figuras es retomado en la actividad 3, donde se condiciona a los alumnos más fuertemente a usar las propiedades conocidas para fundamentar sus conclusiones.

Para la sistematización de los acuerdos que se van asentando luego de cada discusión de esta secuencia, es necesario organizar actividades específicas, de las que damos ejemplos en el apartado "Plantear situaciones para sistematizar propiedades de los cuerpos y las figuras" de este *Cuaderno*.

Plantear situaciones para construir figuras y armar cuerpos con distintos procedimientos

En el apartado anterior, planteamos actividades en las que los alumnos debían reproducir figuras dado un modelo aportado por el docente. Otros problemas que también implican **construcciones de figuras** son los que requieren realizar un dibujo a partir de ciertos datos. En este trabajo será necesario considerar con los alumnos la posibilidad de que con esos datos se pueda construir solo una figura o más de una.

Otra cuestión importante se relaciona con el uso de los instrumentos de Geometría. En este sentido, creemos fundamental destacar que no se trata de que los alumnos adquieran una destreza en el manejo de los mismos como conocimiento en sí mismo, sino que su uso debe estar al servicio de la resolución de problemas, para que los alumnos avancen en sus conocimientos sobre las propiedades de las figuras. El hecho de que los alumnos tengan que pensar la manera de construir una figura y analizar cuál es el instrumento que más utilidad tiene frente a cada situación planteada, permite que exploren, algunas veces, y que usen, otras veces, diferentes propiedades de las figuras y los cuerpos. Asimismo, la evaluación de la necesidad de hacer o no un trazado preciso se podrá realizar en el marco de un problema.

Con respecto al repertorio de figuras, la propuesta para 5º año/grado es focalizar el trabajo sobre triángulos y cuadriláteros. A la vez, las propuestas con construcciones requerirán del uso del compás y, por lo tanto, será necesario realizar actividades que requieran trasladar segmentos y trazar circunferencias.

Si bien el círculo es una de las primeras figuras geométricas que los chicos reconocen en la escolaridad, difícilmente han tenido ocasión de construir uno a partir de la línea que lo limita, es decir, la circunferencia. En consecuencia, es necesario que, para arribar a esta idea, presentemos problemas en los que sea necesario usar la noción de distancia entre dos puntos y de igual distancia entre un punto y otros.

Una situación sencilla para dar idea de un punto fijo y otros puntos equidistantes de él se plantea en el ejemplo siguiente.

1. Durante la noche, una cabra está atada a un poste con una cuerda de 3 metros de largo. Al cabo de un tiempo, en la zona que estuvo al alcance de la cabra, ya no quedan hierbas para comer.
a) Dibujá a mano alzada la zona en la que no quedan hierbas.
b) El pastor quiere poner una vasija con agua para que la cabra pueda beber. ¿A qué distancia del poste debe hacerlo? ¿A qué distancia del poste están las hierbas que la cabra no pudo comer?
c) A 7 metros del poste donde está atada la cabra, el pastor quiere atar un burro. ¿De qué largo debe ser la cuerda con que ate al burro para que no comparta con la cabra ninguna zona de pasto?
d) Usá un instrumento de geometría conveniente para mejorar tu dibujo.

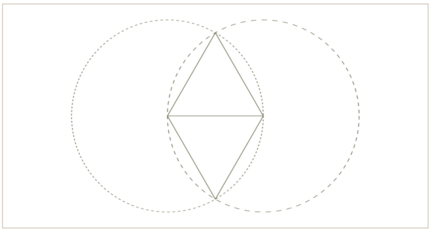
2. Dibujá un segmento AB de 5 cm de longitud.
a) ¿Es posible encontrar un punto P que esté a 4 cm de A y también de B? ¿Y un punto Q que esté a 4 cm de A y a 3 cm de B?
b) ¿Cuántos puntos cumplen las condiciones expresadas en a)?
c) Si se trazan los segmentos AP y BP, ¿qué tipo de triángulo determinan con AB?

Es posible que algunos chicos identifiquen sólo algunos puntos en la zona donde “la cabra pudo comer”, y la discusión sobre las respuestas del primer problema debiera permitir a los alumnos diferenciar tres zonas, la de los puntos situados a una distancia del poste menor que 3 m, mayor que 3 m e igual a 3 m. Las ideas de circunferencia y círculo surgen como el “lugar geométrico” de los puntos que cumplen una cierta condición. Para la circunferencia, estar todos a igual distancia (radio) de otro punto llamado centro, y para el círculo, estar todos a una distancia del centro igual o menor que el radio. Estas nociones se pueden reinvertir en muchos problemas, entre ellos el planteado como problema 2, donde intervienen como parte del procedimiento para construir triángulos a partir de la medida de sus lados.

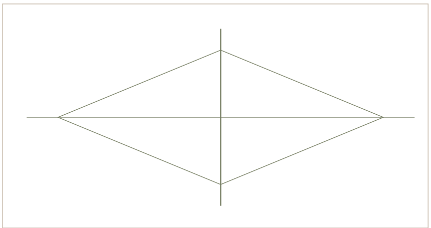
En 5º año/grado profundizamos en el estudio de triángulos y cuadriláteros a partir de actividades que implican el uso y la discusión respecto de la pertinencia del uso de los diferentes instrumentos de geometría para construirlos y, en particular, del compás.

1. Hacé el dibujo de un rombo y escribí el procedimiento que usaste.
2. Leila dice que para hacerlo solo necesita una regla y un compás. Sin embargo, Darío dice que sin compás, pero con una escuadra, también se puede dibujar un rombo. ¿Es cierto lo que dicen? ¿Por qué?
3. Para dibujar un rombo de 4 cm de lado, ¿qué procedimiento conviene usar?

En el primer caso, se pide construir un rombo cualquiera con la idea de que los chicos busquen diferentes formas de hacerlo, utilizando las propiedades que conocen.



Si pueden usar compás y regla, y saben que el rombo tiene cuatro lados iguales y que el compás traza una curva cuyos puntos están a igual distancia del centro, entonces pueden trazar dos triángulos isósceles con el lado diferente común para formar el rombo.



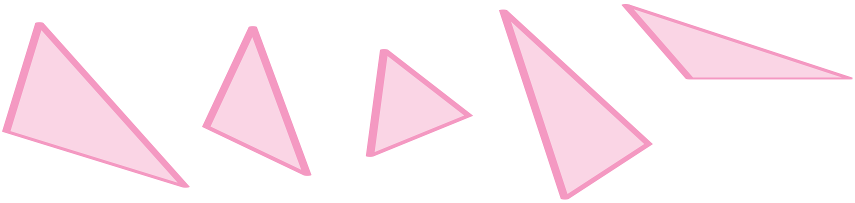
Si usan escuadra, es posible que dibujen un rombo partiendo de unas diagonales perpendiculares que se corten en el punto medio.

Si no aparecieran procedimientos distintos, la pregunta 2 habilita la discusión sobre los mismos. Después de realizar la consigna 3, habrá que discutir si, con este dato, queda definido un único rombo o más de uno. En este caso, se necesita la medida de una de sus diagonales o de uno de sus ángulos, para que quede totalmente definido.

Se podría proponer, a continuación, elaborar instrucciones para construir figuras a partir de sus diagonales (rombos, romboides, rectángulos). De manera similar a lo que planteábamos con la actividad de los mensajes, los alumnos tendrán que interpretar cada uno de los pasos de la construcción y ejecutarlos, explicitando las propiedades.

Otras propuestas que ponen en juego las propiedades son las que requieren componer unas figuras combinando otras.

• Dados los siguientes triángulos, agregá otro igual a cada uno, de tal manera que quede formado un rombo en los casos en que sea posible.



Esta es otra actividad que permite trabajar las propiedades de los lados y de los ángulos de los rombos y, también, analizar la inclusión de los cuadrados entre los rombos. Dado que en algunos casos no es posible obtener la figura pedida, habría que explicitar cuál es el cuadrilátero que se obtiene y por qué no es rombo.

En cuanto a la **construcción de cuerpos** se puede plantear, por ejemplo, que dado un prisma de base rectangular (cuadrada, triangular), dibujen el desarrollo plano que permita armarlo. En sentido inverso, dado el desarrollo plano, podemos solicitar que anticipen cuál será el cuerpo que se podrá formar y que justifiquen dicha decisión.

En estas propuestas, los alumnos están "obligados" a analizar las características de cada uno de los cuerpos (qué figura son sus bases y cuántas caras laterales tiene), para realizar la tarea. Se trata de anticipar y no de constatar, dado que no estamos pensando en una construcción efectiva, sino en la producción de argumentos apoyados en las propiedades de los cuerpos, lo cual supone, como ya lo anticipamos, una diferencia fundamental con el trabajo realizado en el Primer Ciclo.

Plantear situaciones para sistematizar propiedades de los cuerpos y de las figuras

Las actividades que proponemos en este apartado implican pequeños o grandes cierres que se hacen necesarios para seguir avanzando. No están pensadas siempre al final de cada tema, sino que algunas de ellas deberían intercalarse en el desarrollo de las otras actividades.

Estas actividades pueden requerir de los alumnos que seleccionen datos, juzguen la veracidad de afirmaciones, respondan a preguntas, determinen semejanzas y diferencias o bien que organicen clases con los diferentes conjuntos de figuras y cuerpos estudiados.

Para cualquiera de los diferentes conjuntos de formas geométricas propuestas, es posible plantear consignas similares a las que sugerimos abajo y que pueden servir para elaborar otras similares. Por ejemplo, para el caso de la adivinanza con **figuras** se podría proponer una actividad como la siguiente.

> • Clasificá las figuras formando grupos con las que tengan características comunes. Escribí qué figuras integran los grupos que formaste.

Para esta actividad, cada alumno puede clasificar las figuras y luego mostrar su trabajo a un compañero para que busque cuál es la característica común en cada grupo. Luego de este intercambio, es bueno debatir acerca de las diferencias que encontraron al comparar sus clasificaciones. Es posible analizar si hubo desacuerdos y a raíz de qué se produjeron, es decir si detectaron que alguna figura que el compañero incluyó no tenía la característica que se le había otorgado a la clase. Por ejemplo, si las figuras eran triángulos, que alguien haya agrupado los triángulos según tengan sus lados iguales o no y haya incorporado en la clase de “lados iguales” uno que no los tiene. También podemos aprovechar esta oportunidad para observar que hay diferentes tipos de clasificaciones. En algunos casos, son excluyentes, es decir que si una figura pertenece a una clase, ya no puede pertenecer a otra más, por ejemplo si se toma como criterio la cantidad de lados iguales. En cambio, en otros casos la misma figura podría pertenecer a varias clases, por ejemplo en el caso en el que se clasifique según *Los que tienen ángulos agudos, Los que tienen ángulos rectos, Los que tienen ángulos obtusos.*

También es interesante que, una vez que los alumnos organizaron los grupos de triángulos, se seleccione uno de los agrupamientos y luego se le den a cada grupo dos o tres triángulos, planteando como consigna: *Para cada triángulo, digan en qué grupo de los formados lo incorporarían y por qué.* También se puede plantear que algún alumno colocó dos triángulos dados juntos, y preguntar cuál es la característica que permite reunirlos. Nuevamente, aquí es pertinente organizar una puesta en común, donde los chicos expliciten las propiedades que dan lugar a los grupos que armaron, comparen los elementos incluidos en los grupos en cada caso, y discutan si un mismo triángulo puede pertenecer a más de uno de los grupos formados.

Otra actividad de sistematización posible es solicitar a los alumnos que armen, en forma individual, un cuadro donde ubiquen las propiedades de las figuras o cuerpos que hayan explorado, y, luego, presentar algunas preguntas donde las propiedades se utilicen para justificar la verdad o la falsedad de ciertas afirmaciones[17]. Por ejemplo, en relación con los cuadriláteros, se podría proponer.

- Completá el siguiente cuadro, dibujando un cuadrilátero en cada sector.

		Diagonales perpendiculares		Diagonales no perpendiculares	
		Dos pares de lados paralelos	Un par de lados paralelos	Dos pares de lados paralelos	Un par de lados paralelos
Diagonales diferentes	Una es cortada en su punto medio				
	Las dos se cortan en sus puntos medios				
Diagonales iguales	Una es cortada en su punto medio				
	Las dos se cortan en sus puntos medios				

[17] **Recomendación de lectura:** véase el apartado "La gestión de la clase" en relación con los tipos de argumentos que elaboran los chicos, en "Enseñar Matemática en el Segundo Ciclo" de este *Cuaderno*.

• Discutí con tus compañeros si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas.
- Los cuadrados tienen diagonales iguales.
- Las diagonales del rectángulo son perpendiculares.
- El rombo y el cuadrado son los únicos que tienen diagonales iguales.
- Los cuadriláteros que no tienen todos sus lados iguales tampoco tienen diagonales iguales.
- El romboide y el cuadrado tienen diagonales perpendiculares.
- Las diagonales de todos los cuadriláteros se cortan en el punto medio.

Para el caso de los **cuerpos,** es posible proponer:

• Contestá por escrito a las siguientes preguntas:
¿Hay prismas que tienen todas sus caras rectangulares? ¿Cuáles?
¿Hay prismas que tienen todas sus caras iguales? ¿Cuáles?
¿Qué prisma tiene 6 caras? ¿Y cinco? ¿Y siete?
¿Cuál es la menor cantidad de caras que puede tener un prisma? ¿Por qué?

Los registros de las conclusiones que fueron realizados en las actividades anteriores podrían usarse tanto para resolver estas actividades como para, una vez finalizada cada actividad, comparar las respuestas.

Para medir y calcular medidas

La propuesta que presentamos a continuación, y que busca la comprensión del proceso de medir, incluye problemas que requieren el cálculo mental y aproximado de pesos, capacidades, longitudes, perímetros y superficies junto con el análisis de los resultados, juzgando la razonabilidad de los mismos según el contexto y los valores involucrados. Busca, además, que los chicos puedan comparar cantidades y usar las equivalencias entre las diferentes unidades para expresarlas, así como relacionar las formas geométricas con las maneras de determinar el valor de su área o su perímetro.

La vida cotidiana aporta numerosas situaciones que podrían ser el punto de partida de este estudio. Los problemas reales poseen la ventaja de que pueden permitir a los alumnos construirse una representación interna del significado[18] de cada una de las magnitudes que se estudian y elaborar una apreciación de los diferentes órdenes de cada magnitud, como por ejemplo cuánto es 1 m, 10 cm, 1/2 m, 1 m^2, etc., pero, al mismo tiempo, ponen límites a los planteos posibles.

[18] **Recomendación de lectura:** véase el apartado “Los significados”, en “Enseñar Matemática en el Segundo Ciclo” de este *Cuaderno*.

En Segundo Ciclo, y en particular en 5° año/grado, es conveniente que los alumnos se desprendan de este tipo de situaciones y se involucren en análisis más próximos a un nivel teórico, como por ejemplo el que proponemos para la relación entre perímetros y áreas que se plantea más adelante en el apartado "Plantear situaciones para explorar relaciones entre perímetros y áreas".

Respecto de longitudes, pesos y capacidades, proponemos avanzar en el uso de las equivalencias entre unidades para estimar el resultado de un cálculo en el que intervienen cantidades expresadas con diferentes unidades. Para el tratamiento de la superficie, incluimos el significado de medir esta nueva magnitud, la diferencia entre sus unidades de medida y las de las longitudes, el cálculo exacto y aproximado de áreas de distintas figuras y la relación de esta magnitud con el perímetro. En cuanto al estudio del perímetro, planteamos la exploración de lo que sucede con esta medida al hacer variar las formas geométricas.

Tanto el perímetro como el área pueden considerarse parte del mundo aritmético y, de hecho, muchas veces la enseñanza los ha reducido a la realización de una cuenta, pero puesto que son medidas asociadas a figuras, el aspecto geométrico también entra en la consideración de los conocimientos involucrados en este tipo de situaciones. Por otra parte, para que el cálculo con algoritmos y fórmulas tenga sentido para los alumnos, estas sistematizaciones deben ser el cierre de un proceso que se inicia en las mediciones efectivas y en la elaboración personal de procedimientos para la determinación de las medidas. En este año avanzaremos solo hacia las primeras fórmulas de cálculo de área de figuras como el cuadrado y el rectángulo.

Afirmábamos en el apartado referido a los números racionales que uno de los significados que debemos abordar para su estudio es el de la medida. Es decir, aquellas situaciones en las que se trata de cuantificar las veces que "entra" una cantidad elegida como unidad en otra, y ese número de veces no siempre puede expresarse con un número natural. Los números racionales, en su expresión fraccionaria o decimal, nos permiten en estos casos cuantificar la medida y escribirla. Ahora bien, algunas cantidades, como los perímetros y las superficies, se refieren a nociones geométricas y, por lo tanto, en los problemas que se estudian intervienen también las propiedades de las figuras. En este sentido, cabe señalar que a la hora de planificar la enseñanza debemos distinguir qué problemas plantear si el objeto de estudio son los números racionales, cuáles si es la medida y cuáles si son las propiedades de las figuras, determinando en qué aspectos se pone el énfasis.

Plantear situaciones para estimar, medir y expresar cantidades

El objetivo del trabajo con **estimaciones** es que frente a una situación los alumnos sean capaces de analizarla, de establecer relaciones entre los datos, de buscar procedimientos que les parezcan más útiles, de aplicarlos y de sacar conclusiones respecto de lo realizado. En relación con esto, creemos que una clase de estimación debería asegurar la producción de estrategias por parte de los alumnos, su comparación, y el análisis de las posibilidades y limitaciones de las mismas.

Analicemos los procedimientos de estimación que podrían presentarse a partir de un problema como el siguiente[19].

> • El paraje Yasí Berá comienza a inundarse cuando el río alcanza una altura de 6,7 metros. Ahora está en 5 metros y por día crece entre 0,25 m y 0,40 m. Aproximadamente, ¿en cuántos días se puede esperar, si se mantienen las condiciones, que comience a inundarse Yasí Berá?

Los alumnos podrían pensar que al río le falta crecer 1,7 m y que crece en promedio 0,35 m por día [(0,25 + 0,40)/2], por lo que en 2 días será 0,70 m; en 4 días 1,40 m, en 5 días 1,75 m, por lo tanto se inundará en, aproximadamente, 5 días.

Otro procedimiento consistiría en calcular en cuántos días como mínimo y en cuántos como máximo se alcanzaría el límite de altura. Si crece el mínimo, crece 1 m en 4 días (0,50 m en 2 días), 0,75 m en 3 días. Por lo tanto, se puede esperar la inundación como máximo en 7 días. Si crece el máximo, en 3 días crece 1,2 m, en un día más llega a 1,6 m. Por lo tanto, puede esperarse, como mínimo, que comience la inundación en 5 días y, como máximo, en 7 días. Dicho en otros términos, la inundación puede comenzar entre el 5º y el 7º día.

En este problema es interesante discutir los diferentes tipos de respuestas que es posible obtener, según aparezcan conceptos tales como *en promedio, como máximo* o *como mínimo,* o *entre,* teniendo en cuenta a la vez que siempre se trata de estimaciones basadas en datos acumulados hasta la fecha y que una crecida puede darse en un tiempo que sorprende a los pobladores.

La utilidad de la estimación puede considerarse, desde otra perspectiva, no solo útil para resolver una situación que admite una respuesta aproximada, sino también en aquellas que requieren un cálculo exacto. Saber de antemano alrededor de cuánto va a ser un resultado puede servir para controlar el resultado, si es

---

[19] Extraído de Saiz, I., Camerano, C. y Barrionuevo, C. (1999), *Documento de apoyo Nº 4/99. Matemática. La estimación de resultados*. Asesoría Técnico-Pedagógica, Consejo General de Educación de la provincia de Corrientes.

posible o no. En consecuencia, podremos ofrecer las siguientes actividades que requieren que los alumnos elaboren procedimientos para anticipar o controlar resultados de sumas de cantidades, brindando, a la vez, una nueva oportunidad para avanzar en el conocimiento de las fracciones y los decimales.

Secuencia para estimar durante el cálculo: "Aproximando medidas"[20]

Se trata de lograr que los alumnos encuentren criterios de redondeo para realizar cálculos mentales aproximados con medidas de longitud, capacidad, peso, etc.

Actividad 1

Los alumnos trabajan en grupos de 4 integrantes cada uno. Para cada cálculo, designaremos a un integrante de cada grupo para responder y explicaremos la consigna de este modo:

Voy a escribir en el pizarrón un cálculo y 3 resultados posibles de ese cálculo. Cada uno de los chicos designados por grupo tiene que elegir, entre los tres resultados, el que considere más aproximado al resultado exacto. Lo escribe en un papelito y me lo entrega. Solo dispondrán de 5 minutos y no podrán realizar comentarios con el resto del equipo. Posteriormente, tendrán oportunidad de discutir y, si lo creen necesario, podrán cambiar el resultado que ya dieron. El puntaje que gana cada alumno se asigna al equipo al cual pertenece. El equipo que elige el resultado correcto desde el principio, gana dos puntos; si un equipo elige un resultado menos aproximado al principio, pero luego lo cambia por uno correcto, entonces gana 1 punto; los demás grupos tendrán 0 punto.

Escribiremos en el pizarrón el cálculo y los 3 resultados posibles:

$$3/4 \text{ kg} + 270 \text{ kg} + 0{,}680 \text{ kg} = \quad \boxed{1 \text{ kg}} \quad \boxed{1\ 1/2 \text{ kg}} \quad \boxed{1\ 3/4 \text{ kg}}$$

Recogeremos los papelitos y anotaremos el resultado de cada equipo en el pizarrón. Luego, en cada equipo, los alumnos discutirán la aproximación escrita en el papel entregado. Deberán decidir si la conservan o la cambian. En ambos casos, deberán justificar por qué el número elegido es la mejor aproximación. En la puesta en común, preguntaremos a los equipos si desean mantener o no la aproximación elegida y las razones correspondientes. Cada equipo comunica la decisión tomada y los demás deben manifestar su acuerdo o desacuerdo con tales argumentos.

[20] Secuencia tomada del documento Saiz, I. (1992), ***Asesoría Técnico-Pedagógica.*** Consejo General de Educación de la provincia de Corrientes.

A continuación, si no lo han hecho al discutir en el grupo la aproximación entregada, cada uno de los niños encuentra el resultado exacto y las diferencias entre ese resultado y las aproximaciones dadas.

Por último, se asignan los puntajes a los equipos. Gana 2 puntos el o los equipos que hayan dado la aproximación más cercana; el equipo que dio una aproximación errónea, pero luego de la discusión en grupo la cambió, gana 1 punto.

Actividad 2

Reiniciaremos un trabajo similar al de la actividad anterior, pero con otros cálculos, por ejemplo:

- Elijan el resultado que consideren más aproximado al resultado exacto:

782 g + 2,5 kg + 425 g = $\boxed{\text{3 kg}}$ $\boxed{\text{4 kg}}$ $\boxed{\text{5 kg}}$

- Ahora, trabajando con otra magnitud, elijan el resultado más aproximado:

63 cm + 0,22 cm + 3/4 m = $\boxed{\text{1 m}}$ $\boxed{\text{1,75 m}}$ $\boxed{\text{2,3 m}}$

Después de dos o tres juegos, se pide a los alumnos que comenten los criterios de aproximación que les resultaron más útiles. Es conveniente acumular los puntajes de los equipos a lo largo de varias estimaciones; de esta manera se establece una competencia entre los equipos, con el fin de lograr mejores aproximaciones en los cálculos mentales. Así también, es importante que los alumnos tengan suficiente tiempo para rever sus resultados y discutir en el equipo. El puntaje mayor se asigna de todos modos a la primera producción para favorecer que los alumnos asuman la responsabilidad y se comprometan en hacer la mejor elección posible.

El momento de la confrontación entre las diversas propuestas de los equipos es uno de los más importantes en esta secuencia. Los equipos tienen que ser capaces de argumentar, de justificar por qué sostienen o cambian lo propuesto. Aparecen entonces criterios utilizados para aproximar los datos que eventualmente pueden constituirse en “acuerdos” que se sostienen de una clase a otra. Es importante que propiciemos la formulación de criterios que se han producido durante el trabajo, pero que no están claros o presentes para todos. Asimismo, en el caso en que detectemos un criterio interesante, usado por algunos de los alumnos, pero no muy difundido en la clase, lo recuperaremos para discutirlo entre todos.

Es conveniente tener en cuenta que los números, tanto los de las medidas que se van a sumar como los de los resultados, deben seleccionarse con un criterio que asegure la elaboración de las estrategias de aproximación en el sentido de los objetivos propuestos. Por ejemplo, en el cálculo de la actividad 1, tener 3/4 kg y 270 g permite asegurar que el resultado será más de 1kg, apoyado en el conocimiento de que 270 g es más que 1/4 y entonces 3/4 kg más otro peso que es más que 1/4 kg será mayor que 1 kg. Resta analizar cuánto suma agregar 0,680 kg. Para esto, a su vez, hay que pensar cuánto es este peso: ¿más o menos que 1/2 kg?, etc. Este mismo tipo de actividades se puede proponer para las otras magnitudes o también podrían servir para iniciar el estudio de las operaciones con números fraccionarios y decimales.

Con respecto a las actividades de **medición**, en este Ciclo se deberían realizar, en principio, en relación con las magnitudes que se tratan por primera vez en la escuela. En el caso de 5° año/grado, se trata del área. Para trabajar la noción de área de figuras planas, no siempre se toma en cuenta que las magnitudes área y longitud están íntimamente relacionadas, por lo tanto se impone un trabajo de diferenciación entre ellas, que colabore en la mayor comprensión de cada una.

En este sentido, cabe recordar que las mediciones efectivas dan a los alumnos una mayor comprensión tanto del proceso de medir como de las características de la magnitud a medir y de la forma de expresar el resultado de la medición: un número y su respectiva unidad.

Para que los chicos realicen mediciones y estimaciones de superficies con unidades elegidas por ellos, se podría plantear, por ejemplo, una actividad como la siguiente:

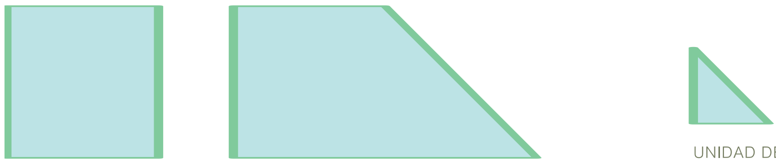
• Se quiere saber, de manera aproximada, si 20 bancos con sus respectivas sillas y el escritorio de la maestra podrán entrar o no en un aula de 4 m x 7 m.

En este tipo de situaciones, los niños podrían utilizar como unidad de medida un banco con su respectiva mesa y, a partir de allí, pensar en "hileras" de bancos para cubrir los 7 m de largo y los 4 m de ancho. También podrían comparar directamente con una "hilera" de bancos de su salón. Sabiendo que hay 10 bancos en una parte de un salón que tiene 2 m por 6 m, deberán estimar para las medidas del otro salón lo que podría suceder.

Comprender el significado de medir áreas es un concepto difícil para los chicos. Entender que la unidad de medida es una porción de superficie y que esta puede "entrar" una cierta cantidad de veces entera o como fracción en otra dada, solo es posible si los alumnos participan activamente en el proceso de "cubrir" con esa unidad la superficie dada. Por esta razón, las primeras aproximaciones a este estudio deben estar orientadas por nosotros. Presentamos, a continuación, un conjunto de actividades que permiten introducir estas discusiones[21]:

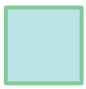
[21] Las actividades 1 y 2 son adaptaciones de actividades que se encuentran en: Barallobres, G.; Chara, S. y Schaposchnik, R. (2001), ***Matemática 5, Serie Siempre Más,*** Buenos Aires, Aique.

1. Determiná, aproximadamente, el área de cada una de las siguientes figuras, utilizando la unidad de medida que se propone:



UNIDAD DE MEDIDA

2. Martina dice que si la unidad de medida fuera un cuadradito como el siguiente, para determinar el área de las figuras del problema anterior no hace falta poner esta nueva unidad dentro de las figuras para determinar cuántas veces entra.

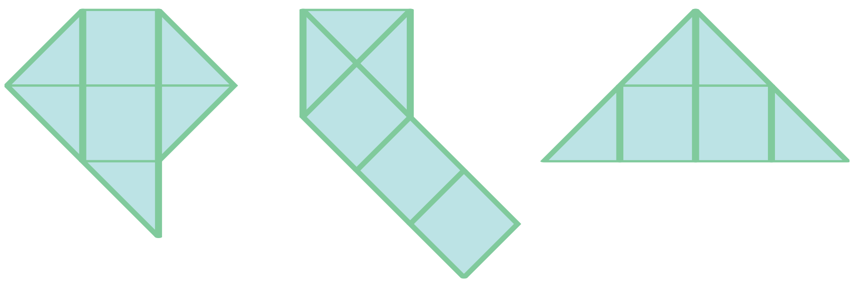


a) ¿Es verdad lo que dice Martina? ¿Por qué?
b) ¿Cuál sería el área de cada figura con esta unidad?

3. Utilizando como unidad de área el triangulito del problema 1, dibujá dos figuras que tengan un área de 8 unidades.

4. Utilizando como unidad de área el cuadradito del problema 2, dibujá dos figuras que tengan un área de $4\frac{1}{2}$ unidades.

5. Para el problema 4, tres chicos armaron las siguientes figuras. Controlá si cumplen con la consigna o no y por qué.



Para articular el trabajo de medición y cálculo entre distintas áreas, por ejemplo con Tecnología, se podrían presentar situaciones en las que sea necesario calcular cuánto material se requiere para cortar cierta cantidad de piezas a partir de un molde. Por ejemplo, una determinada forma que "entra" en un rectángulo y con la cual se hará una cantidad de sombreros de cartulina para una fiesta de cumpleaños.

En este tipo de problemas, a diferencia de los anteriores, los alumnos tienen que pensar que la unidad de medida debe ser el rectángulo base, es decir, deben decidir cuál es la unidad. Asimismo, tienen que determinar cuántas veces entra esta unidad en una tela o cartulina (superficie), para luego poder calcular cuánta tela o cuántas hojas de cartulina serán necesarias. Los procedimientos de resolución podrían incluir conteos y/o cálculos.

Por ejemplo, podrían pensar en medir el largo del rectángulo y el ancho de la cartulina y ver cuántas veces entra la primera medida en la segunda. Luego, con esta información, deberían determinar cuántas hileras de rectángulos podrían entrar en la cartulina aproximadamente, multiplicando, contando, sumando. El análisis de los diferentes procedimientos de cálculo se retoma en el próximo apartado.

Para el estudio del perímetro, proponemos vincular este contenido con lo estudiado en Geometría sobre lados de las figuras, por ejemplo al analizar cómo varía el perímetro a partir de la introducción de modificaciones a una figura patrón.

Situaciones como las siguientes, que evitan el cálculo, son muy convenientes porque ponen en juego el concepto de perímetro, que constituye la base para pensar, luego, la vinculación con el área.

• ¿Es posible saber, sin medir, si una de estas figuras tiene mayor perímetro que otra o no, o si son iguales?

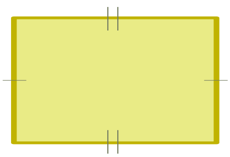


Fig. 1

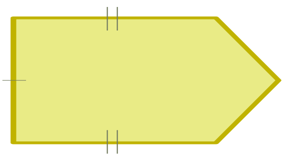


Fig. 2

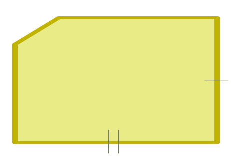


Fig. 3

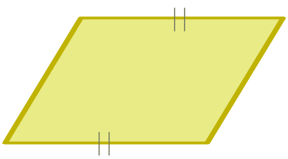


Fig. 4

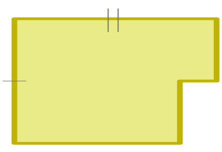


Fig. 5

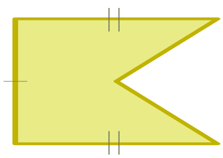


Fig. 6

El objetivo de esta actividad es que los alumnos, sin medir, a partir de la información del rectángulo, puedan establecer relaciones entre las figuras para analizar qué sucede con el perímetro en las distintas variaciones. Por ejemplo, se puede saber que el perímetro de la figura 2 será mayor que el del rectángulo de la figura 1 y que los "lados" que forman la punta representan una longitud mayor que la del lado del rectángulo. Una discusión interesante podría presentarse a raíz de la comparación entre el rectángulo y la figura 5; para más de un alumno será una sorpresa que los perímetros sean iguales.

Otras actividades que permiten reinvertir lo discutido a propósito de la actividad anterior podrían ser las siguientes:

1. Juan y Javier están discutiendo respecto del perímetro de estas dos figuras y no se ponen de acuerdo. Javier dice que la figura 1 tiene mayor perímetro que la 2 y Juan dice que son iguales. ¿Quién tiene razón y por qué?

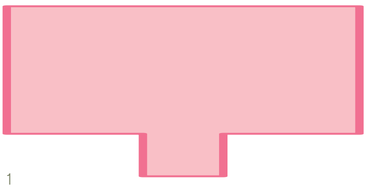


Fig. 1

Fig. 2

2. ¿Qué variaciones se podrían realizar a las figuras anteriores para que resulte en la segunda un perímetro mayor y qué variaciones para que resulte uno menor?

Plantear situaciones para calcular medidas con distintos procedimientos

En este apartado, encontraremos muchos puntos de contacto con el desarrollo del Eje "Número y Operaciones", tanto por la íntima relación y los aportes respectivos que se realizan entre los números racionales y la medida como por el itinerario que proponíamos para el abordaje de los algoritmos en aquel Eje y el que propondremos aquí para el arribo a las fórmulas de cálculo de ciertas medidas (perímetro y área).

Tal como se afirmó al desarrollar el Eje "Número y Operaciones", las situaciones de medición permiten otorgar sentido al uso de los números racionales. En el contexto de la medida, las fracciones y los decimales adquieren sus primeros significados para los chicos, ya que el uso social más difundido de estas escrituras está asociado a medidas de longitud, superficie, peso, capacidad y tiempo.

Al plantear **cálculos de longitudes**, **capacidades** y **pesos** es interesante elegir los números de manera tal de promover el uso de estrategias de cálculo mental, como en la actividad siguiente.

• Completá la línea punteada en las siguientes sumas y restas de cantidades:

3,5 l + …… = 10 l

$\frac{1}{4}$ l + …… = 5 l

$\frac{3}{4}$ l + …… = 2 l

6,75 m + 1,25 m = ……

2,50 m - 1,25 m = ……

1 $\frac{3}{4}$ kg + 5 $\frac{1}{2}$ kg = ……

Los siguientes problemas permiten establecer relaciones entre las unidades más usuales de capacidad, peso y longitud, y elaborar distintos procedimientos para encontrar los resultados. Resultan interesantes, también, porque se pueden ir sistematizando algunas relaciones entre las unidades para toda la clase, e ir introduciendo otras menos conocidas por su escaso o nulo uso en la vida cotidiana.

1. ¿Cuántos días tardará un jardinero para echar 2 g de un fertilizante si, por día, utiliza 60 mg del producto?

2. Si para el consumo diario una persona gasta en promedio 30 g de leche en polvo, ¿para cuántos días le alcanzará un envase de 1 kilo?

3. Un puente colgante tiene un cartel que señala que soporta una carga máxima de 10 t. Un camión que vacío pesa 3,7 t lleva bolsas y cajas de verduras y frutas con distintos pesos: 75 de 15 kg; 75 de 25 kg, 60 de 28 kg, 45 de 35 kg, 70 de 42 kg. Con esta carga, ¿puede pasar por el puente?

4. Un apicultor, en la época en la que cosecha la producción de miel de sus abejas, obtiene 70 kg de miel. Si para la venta quiere fraccionar este total en frascos de 500 mg, ¿cuántos frascos tendrá que comprar?

5. Al terminar la consulta, un médico le receta a su paciente que durante 7 días debe tomar, cada 8 hs, 5 ml de un medicamento. Si el remedio que tiene que tomar se vende en envases de 12 cl, ¿le alcanza con un frasco de estos para los 7 días?

6. En una bodega se envasan los vinos en botellas de diferentes capacidades. Para la venta a los restaurantes se envasan en botellas de $\frac{3}{8}$ l. ¿Cuántas botellas de esta capacidad se podrán envasar con un tonel de 60 hl?

7. Resolvé:

$\frac{1}{2}$ m - 30 cm = 75 cm + 0,5 m = 6 kg + 500 g =

$\frac{3}{4}$ kg - 500 mg = 2 $\frac{1}{4}$ l - 250 ml =

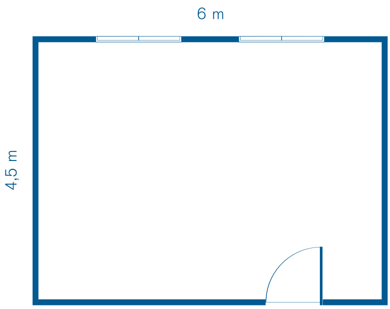
Con respecto al **cálculo de áreas** y en relación con las unidades convencionales, el trabajo que proponemos este año comienza con la medición o estimación de espacios que los alumnos conocen, como su aula, el patio de la escuela, la biblioteca, usando los m^2 y los cm^2. Es fundamental que los chicos puedan realizar las primeras experiencias con un cuadrado de un metro de lado construido con papel, porque esto habilita la posibilidad de que entiendan la medida más allá de su aspecto numérico y la reconozcan también como un espacio cubierto por esa cantidad. En este caso, podrán buscar estrategias con el fin de determinar cuántos de esos cuadrados se necesitan para cubrir todo el espacio solicitado. Por ejemplo, se puede pedir a los alumnos que realicen una actividad como la que sigue.

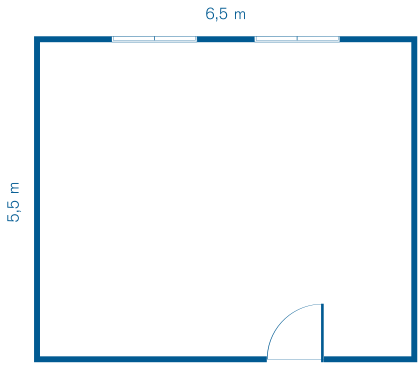
• Estimen las medidas de los lados del aula (aproximarlas a números naturales) y piensen cuántos m^2 (mostrarles, en el piso o en el techo, lo que sería un metro cuadrado) entran.

Otro aspecto a tener en cuenta en relación con el metro cuadrado es la discusión acerca de su forma. Es poco habitual considerar que es posible hacer variar su forma y mantener su medida; así, un rectángulo de 1/2 m x 2 m de lado también mide 1 m^2.

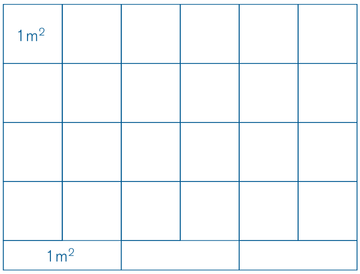
A partir de actividades como la anterior, es posible ir planteando otras que signifiquen un aumento gradual en dificultad, teniendo en cuenta que las características de la situación que se plantee facilitan el uso de determinados procedimientos y dificultan otros. Por ejemplo.

• Calculá el área de las siguientes aulas:





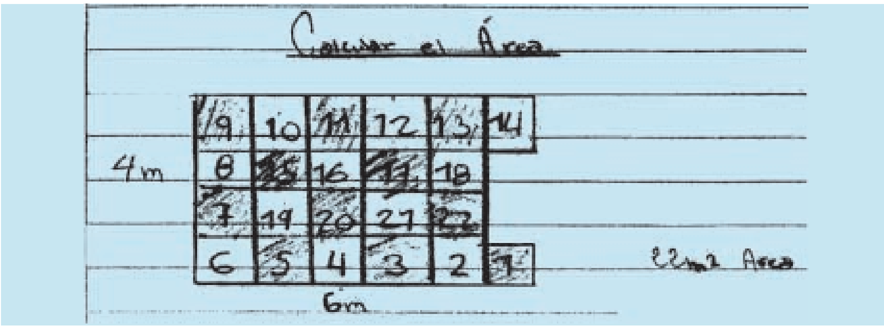
Luego de haber realizado estimaciones de áreas o el cubrimiento del aula con m², es muy probable que los alumnos busquen reproducir el mismo tipo de procedimiento que venían usando en esas situaciones, que en este caso sería cubrir con cuadritos toda la superficie para determinar la cantidad que entra en esas aulas.



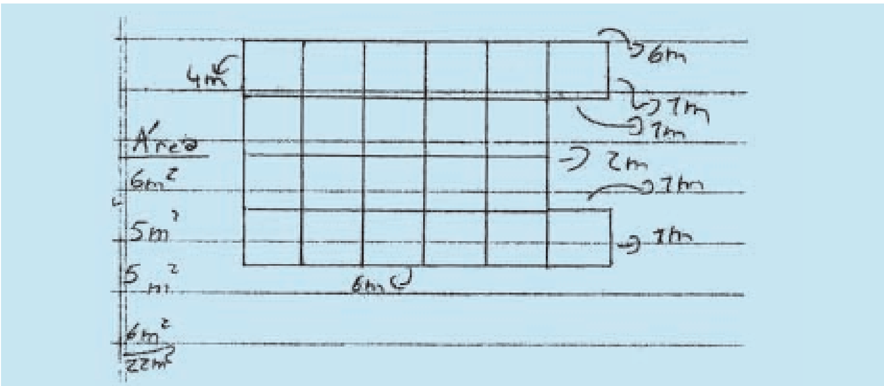
Por ejemplo, para el aula de 6 m x 4,5 m, si bien la longitud de uno de sus lados es un número decimal, el hecho de que sea 4,5 y que el otro lado sea un número par permite que, con el recurso de hacer una figura cuadriculada, los chicos determinen fácilmente que con la última fila arman 3 cuadraditos más porque cada uno es 1/2 de un metro cuadrado. En el caso del aula de 6,5m x 5,5m, si bien sigue siendo válido el recurso anterior, ofrece mayor dificultad para los alumnos, porque al realizar las relaciones entre las porciones de cuadraditos se completan 30 m², quedan 11 mitades de cuadraditos (5 1/2 m²) y la mitad de la mitad de un cuadradito (1/4 m²) que hay que sumar e interpretar ese valor en m² (30 + 5 + 1/2 + 1/4) donde 3/4 de m² se puede expresar como 0,75 m² para que pueda dar como resultado 35,75 m².

Al inicio de este apartado, mencionábamos que existe una similitud entre el itinerario que proponemos que los alumnos recorran con el fin de construir las fórmulas para calcular, por ejemplo, el área de una figura, y la construcción de los algoritmos de las operaciones a las que hacíamos referencia en el Eje "Número y Operaciones". Esta similitud radica en que en los dos casos sostenemos que la sistematización de los algoritmos y las fórmulas tiene que darse a partir de un trabajo de recuperación[22] de los procedimientos de los alumnos. Esto implica que, en un primer momento, debemos *entender dichos procedimientos* para poder hacernos cargo del proceso de evolución de los mismos, hasta llegar al procedimiento experto. A continuación, presentamos algunos procedimientos utilizados por alumnos de 5º año/grado para calcular el área de figuras que no son rectángulos y que muestran diferentes conocimientos, tanto en el campo geométrico como en el aritmético.

Daniel

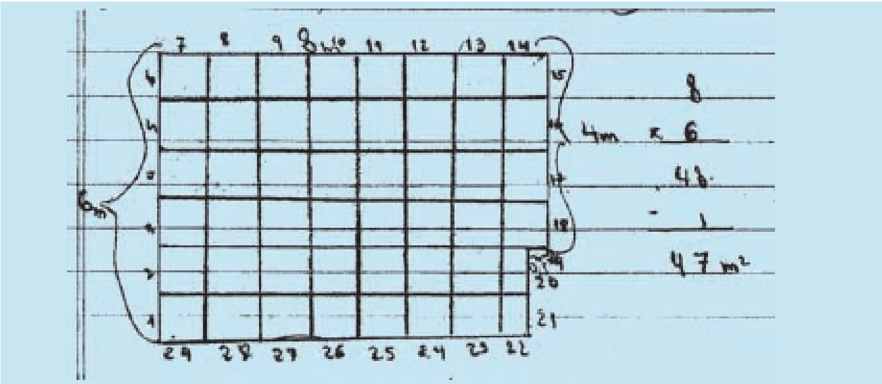


Ignacio



[22] **Recomendación de lectura:** véase el apartado "Las situaciones de enseñanza", en "Enseñar Matemática en el Segundo Ciclo" de este *Cuaderno*.

Alejandra



Los dos primeros procedimientos están referidos a la misma figura y usan diferentes recursos para obtener el total de cuadritos. En el caso del procedimiento de Daniel, el alumno cuenta para saber cuántos cuadritos *entran* en la figura, en cambio Ignacio suma para encontrar el total. Una diferencia importante entre ambos alumnos es que el que realiza una suma da cuenta de haber encontrado cierta regularidad en la cantidad de cuadritos por fila y además una relación entre dicha cantidad de cuadritos y la medida de los lados de la figura.

En el procedimiento de Alejandra, referido a una figura distinta, la estrategia inicial es cubrir la figura con cuadritos, y el recurso para calcular el total es multiplicar. Esta alumna muestra otros conocimientos aritméticos, ya que puede identificar este tipo de situación como multiplicativa; pero además, en el campo geométrico, también demuestra haber establecido ciertas relaciones que no se evidencian en los otros dos procedimientos, ya que puede relacionar el área de la figura solicitada con el área de un rectángulo. Realiza la operación 8 x 6, que es el área de un rectángulo, y le saca 1 m^2, que es la parte que le sobra de dicho rectángulo respecto de la figura original. Este tipo de procedimiento es muy valioso para el itinerario de construcción de la fórmula de cálculo de área del que hablábamos antes, ya que está utilizando el producto de la medida de los lados para hacerlo.

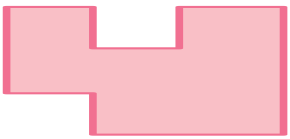
El hecho de que aparezca este tipo de producciones de los alumnos en una clase posibilita que se las compare y se establezcan relaciones entre ellas que lleven a poner de manifiesto relaciones que no todos los alumnos tienen en cuenta. Por ejemplo, podemos plantear preguntas como *¿De qué medida eligieron hacer los cuadraditos? ¿Por qué?*, y otras que lleven a comparar el procedimiento con una suma reiterada y el que tiene una multiplicación.

Este tipo de discusiones posibilita la explicitación de herramientas que usan unos alumnos y que no necesariamente están disponibles por otros. Si bien el hecho de discutirlo una vez con los chicos no garantiza que los que contaron o sumaron vayan a multiplicar en un próximo problema, los pone en mejores condiciones tanto para la resolución de otro problema similar como para la comprensión de las discusiones posteriores.

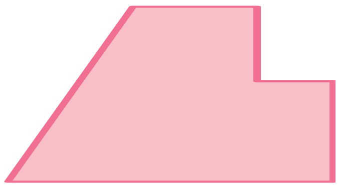
Luego, es posible plantear a los alumnos la consigna *Calculá el área de los siguientes cuadrados y rectángulos utilizando una multiplicación*, apuntando a la sistematización del procedimiento *multiplicar el ancho por el largo*, que podrá expresarse con la fórmula: área = largo x ancho, A = l x a. Cabe aclarar aquí que la idea de altura no ha sido trabajada aún y, por lo tanto, no tiene sentido el uso de las denominaciones base y altura y de la fórmula b x h.

Además de esta sistematización, es importante organizar otras actividades que permitan a los alumnos explorar las posibilidades y los límites de esta fórmula. Por ejemplo, plantear el cálculo de figuras raras como:

• Calculá el área de las figuras A y B.



A



B

Los procedimientos de resolución que los alumnos utilicen para calcular el área de las figuras A y B dependerán de diferentes cuestiones, como por ejemplo, que estén dibujadas sobre papel cuadriculado, o sobre papel liso y con medidas de los lados, etc. En ambos casos, podrán descomponer las figuras en rectángulos y en el caso B, considerar la mitad de uno de ellos discutiendo que no alcanza con pensar sólo en l x a para encontrar el área de todos los rectángulos considerados.

Para el **cálculo del perímetro**, proponemos, en 5º año/grado, seguir un camino similar al planteado para el área, hasta el arribo a la fórmula de perímetro de rectángulos y de cuadrados. Sin embargo, nos parece importante que además de actividades que apunten a dicha sistematización, se presenten otras que pongan el acento en cuáles son los datos que se necesitan para calcular el perímetro de distintas figuras[23].

[23] **Recomendación de lectura:** véase el apartado “Las relaciones entre datos e incógnitas”, en “Enseñar Matemática en el Segundo Ciclo” de este *Cuaderno*.

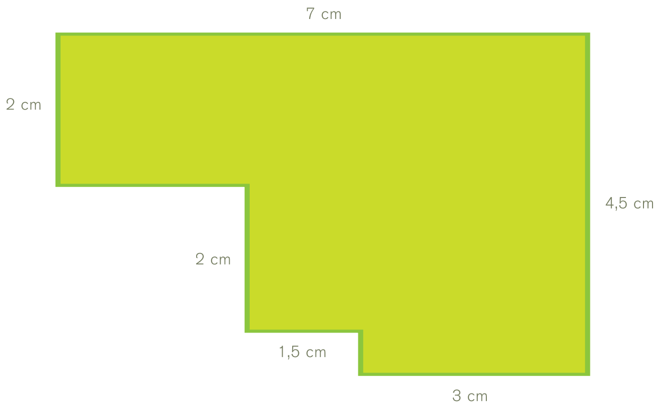
Generalmente, una dificultad de los niños en la resolución de problemas es que sólo pueden aplicar sus conocimientos si poseen toda la información dada en forma directa, es decir dada como dato del problema.

Por este motivo, presentar problemas en los cuales sea necesario analizar el enunciado y observar si la información es suficiente o no para obtener la respuesta buscada o si hay datos que no son necesarios, a la vez que introduce una problemática ligada al tratamiento de la información, plantea la necesidad de analizar las propiedades de la figura que se tiene y relacionarla con los datos proporcionados.

Los siguientes son ejemplos de problemas[24] y ejercicios que requieren un análisis de la información ofrecida, para inferir los datos necesarios y, así, resolver la situación planteada.

1. Don Espinoza tiene que alambrar su terreno, que es rectangular. La municipalidad ya alambró los 20 metros de frente que están sobre la ruta. En total, le falta alambrar 70 metros. Espinoza quiere poner alambre de púa para mayor protección solamente en los costados del terreno.
¿Cuántos metros de alambre de púa tendrá que comprar?

2. Alicia está haciendo un almohadón cuadrado de 50 cm de lado. Para adornarlo, quiere coser en una de sus caras una puntilla colocada a 5 cm del borde formando otro cuadrado.
¿Cuánta puntilla necesita?
3. Calculá el perímetro de la siguiente figura:



[24] Extraído del documento *Plan de Compensación. Ciclo lectivo 2000. Primer documento de orientación.* Ministerio de Educación de la provincia de Corrientes.

En el problema 1, se deben determinar las longitudes de los costados del terreno que no están dadas en el texto. Si faltan cercar 70 m, y el terreno es rectangular, se puede pensar que la longitud del lado de fondo será de 20 metros como el del frente, y calcular que los 50 m corresponden a la longitud total de los dos costados.

En el problema 2, es necesario interpretar qué significa que la puntilla no se coloque en el borde, es decir qué información sacar de ese dato. Una dificultad que suele aparecer es que se consideren los 5 cm de distancia al borde sólo en un extremo del lado, restando 5 cm a 50 cm una vez, y olvidarse de restar los 5 cm del otro lado.

En el problema 3, es necesario interpretar la información contenida en el gráfico y deducir la medida de algunos lados en función de la medida de otros.

Plantear situaciones para explorar relaciones entre perímetros y áreas

El área y el perímetro son dos conceptos que están íntimamente ligados, por lo que el estudio de dicha relación no debería quedar afuera de la escuela. La exploración de esta relación favorece la mayor comprensión de determinadas propiedades que sólo se ponen en evidencia desde un trabajo de diferenciación entre las mismas.

En este apartado proponemos actividades que propician la reflexión acerca de la relación entre el perímetro y el área a partir de cuestionar una idea intuitiva que es muy común en los alumnos, según la cual las dos magnitudes varían de la misma manera: si una aumenta, la otra aumenta y si una se mantiene constante la otra también.

Secuencia para relacionar perímetro y área: “Armando figuras”.

Actividad 1

A continuación, presentamos un juego[25] que apunta, como primer objetivo, a poner en evidencia para los alumnos que hay diferentes figuras que tienen la misma área, del mismo modo que hay diferentes figuras que tienen el mismo perímetro.

[25] **Recomendación de lectura:** en el apartado “Los contextos”, en “Enseñar Matemática en Segundo Ciclo” de este *Cuaderno*, se analiza cómo abordar los juegos como situaciones de aprendizaje.

"Figuras y condiciones": figuras con perímetros y áreas dados.
Materiales: 60 cuadraditos de igual tamaño en cartulina o plástico.
10 tarjetas que digan área, con los siguientes números: 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13 y otras 10 tarjetas que digan perímetro, con los siguientes números: 12, 14, 16, 18, 20, 22, 24, 26, 28, 30.
Organización de la clase: se juega entre tres o cuatro grupos formados por dos personas cada uno.
Desarrollo: el juego consiste en formar, con los cuadraditos, configuraciones en las que estos se encuentren unidos por un lado completo, y que tengan áreas o perímetros que se estipulen desde las tarjetas. La unidad de medida para el perímetro es el lado de los cuadraditos y la unidad de medida para la superficie son cada uno de los cuadraditos.
Se colocan los cuadraditos en el centro de la mesa. Se mezclan las tarjetas numeradas y se colocan boca abajo sobre la mesa. Por turno, uno de los jugadores levanta una tarjeta y la lee en voz alta.
Durante un tiempo estipulado previamente, se trata de armar la mayor cantidad de configuraciones que respeten la condición dada por la tarjeta, utilizando los cuadraditos que están en el centro de la mesa.
Pasado el tiempo, se ponen en común las configuraciones y se adjudica 1 punto a cada configuración correcta y 0 puntaje a las incorrectas.
Se vuelven a colocar los cuadraditos en el centro para la próxima jugada.
El juego termina cuando la suma de puntos acumulados por alguno de los grupos alcance 15 puntos.

En este juego, los alumnos deben construir figuras a partir de condiciones relacionadas con el perímetro y el área. La medida del área está dada más directamente que la del perímetro, ya que la proporciona la cantidad de cuadritos que se usan para construir cada figura. Sin embargo, para el perímetro es necesario evaluar cuáles son los lados que se cuentan y cuáles no, porque sólo se pueden contar los lados que queden en el contorno de la figura construida. Probablemente, el procedimiento más común entre los alumnos al inicio del juego sea probar una configuración y luego contar cada uno de los lados de los cuadraditos del borde hasta dar con la condición establecida, sin embargo lo que esperamos es que a lo largo de sucesivos juegos puedan establecer relaciones entre los elementos de las figuras que les posibiliten desechar el simple juego de prueba y error. Por ejemplo, que puedan decir *Si le agrego otro cuadradito al costado, se aumentan 3 lados al perímetro porque uno queda pegado con la figura.*

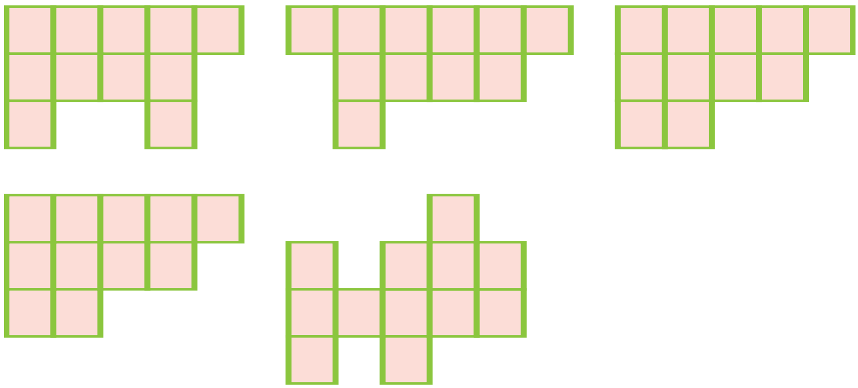
Luego de un primer momento de juego, es recomendable realizar una confrontación en la que se analicen diferentes procedimientos y respuestas de los alumnos. Este primer debate debería permitir poner en común y, en algunos casos, sistematizar procedimientos y estrategias de los alumnos para obtener las figuras, así como también analizar cuáles les resultaron más difíciles de lograr y por qué.

Actividad 2

A continuación, se ofrecen algunas partidas simuladas que se pueden presentar como problemas.

- Marisa dijo que cuando a su grupo le tocó la tarjeta área: 10, armaron 6 figuras; ¿cuáles pudieron haber sido esas figuras?

- El grupo de Hernán armó las siguientes figuras a partir de la tarjeta perímetro: 18. ¿Cuáles van a obtener puntaje?



Las dos partidas simuladas anteriores presentan dificultades muy similares a las que podrían haber aparecido en el juego, con lo que se busca poner a todos los alumnos a pensar al mismo tiempo en la misma situación (cosa que no es posible con el juego, porque surgen diversidad de situaciones en cada uno de los grupos participantes) de manera de permitir una discusión posterior y una confrontación de las resoluciones y poder sacar conclusiones comunes.

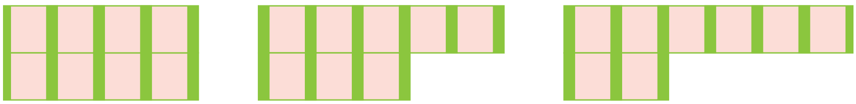
Se prevé que la discusión esté centrada en cómo se calculan el perímetro y la superficie de las figuras y que aparezcan, de esta manera, las principales dificultades que se les presentan a los alumnos para realizarlo, como el caso de aquellos que calculan área cuando tienen que calcular perímetro o viceversa, o el de aquellos que no saben qué unidad de medida usar para calcularlos o puedan decidir medir las configuraciones para realizar los cálculos. Del mismo modo, al discutir las dificultades se pretende que estos debates contribuyan a proveer de ejemplos a los alumnos, puesto que todavía no se les ocurre la manera de construir diferentes figuras de igual área o perímetro.

En esta primera etapa de la secuencia, los alumnos exploran las variaciones posibles que pueden realizar a las figuras para producir otras de igual área o igual perímetro, pero, hasta aquí, dicha exploración se produce con las magnitudes por separado.

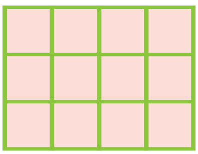
Actividad 3

Los problemas que siguen plantean cuestiones y dificultades que no aparecen necesariamente en el juego y que significan una profundización en la reflexión acerca de la constancia y variación del perímetro y el área.

- Martín dijo que cuando les salió la tarjeta área: 8 el grupo de Rocío había armado las figuras de abajo y él armó otras 2 figuras, también de área: 8 pero de mayor perímetro. ¿Cuáles pueden ser esas figuras?



- Josefina dijo que en la jugada en la que Máximo armó la figura de abajo, ella había armado otras 2 de igual perímetro y área. ¿Qué figuras pudo haber armado?



Estos problemas proponen manejar, a la vez, las condiciones de área y perímetro de una figura, de manera de propiciar la reflexión acerca de algunas de las relaciones que pueden establecerse entre ellas, por ejemplo, a menor área igual perímetro o área menor y perímetro mayor, etc. Se espera que las discusiones producidas anteriormente contribuyan a que los alumnos realicen anticipaciones de las posibles variaciones de las figuras que puedan producir. Lo que se prevé como conclusiones posibles de la actividad es, en el primer caso, que *hay figuras que tienen la misma área y sin embargo su perímetro es diferente* y, en el segundo caso, que *dos o más figuras pueden tener igual perímetro y área, y tener diferente forma*.

Actividad 4

Otra actividad que podemos realizar con el mismo material, y apuntando al mismo objetivo, es disponer una configuración con los cuadritos y solicitarles a los chicos que armen otras, que cumplan a la vez dos condiciones en relación con la dada. Por ejemplo, que tengan mayor área y menor perímetro o menor perímetro e igual área.

Aquí es fundamental tener en cuenta que no siempre es posible cumplir con dichas condiciones a la vez, en relación con cualquier figura dada. Por ejemplo, no es posible producir una figura de mayor área y menor perímetro que una figura convexa dada, ya que cualquier modificación que apunte a aumentar el área, también aumentará el perímetro.

A través de estos problemas, se pretende, además, que los chicos desarrollen argumentos a partir de sus anticipaciones acerca de las variaciones posibles de perímetro y área, que servirán como recursos para reflexionar sobre la validez de algunas proposiciones, como las que se presentan en la actividad siguiente.

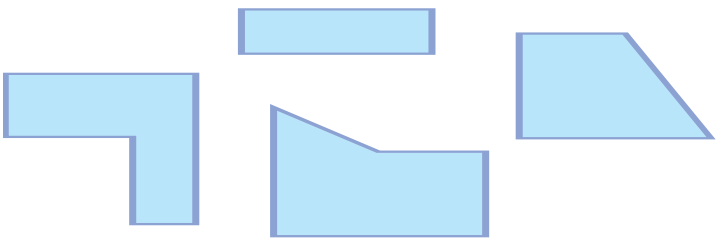
Actividad 5

Esta actividad tiene como propósito que los chicos discutan sobre la validez de proposiciones generales acerca de conservación del área y el perímetro. Para esto, tienen la posibilidad de partir del conocimiento de casos particulares que les proporcionó el problema, y de la resolución y el debate de las partidas simuladas.

• Luego de haber participado del juego anterior, algunos alumnos sacaron las siguientes conclusiones. Indicá si estás de acuerdo o en desacuerdo con las mismas y fundamentá tu respuesta.
- Todos los polígonos de igual área tienen el mismo perímetro.
- Algunos polígonos del mismo perímetro y la misma área tienen diferente forma.
- Todos los polígonos del mismo perímetro tienen igual área.

A continuación, proponemos otra actividad orientada en el mismo sentido que la secuencia anterior, y que puede contribuir a la profundización de las reflexiones iniciadas, puesto que aparecen algunas formas que no son posibles de construir a partir de los materiales del juego.

• Cuando sea posible, transformá[26] (agregándoles o sacándoles algo) las siguientes figuras, para obtener otras que tengan:
a) un área mayor, conservando el mismo perímetro;
b) un área menor y un perímetro mayor.



[26] Esta actividad fue tomada de Barallobres, G.; Chara, S., Schaposchnik, R. (2001), *Matemática 5. Serie Siempre Más*, Buenos Aires, Aique. En dicho texto se proponen otras actividades muy interesantes que desarrollan los objetivos de este apartado.

En esta consigna, no sólo se les pide a los alumnos que transformen figuras para obtener otras con ciertas condiciones, sino también que evalúen la posibilidad de realización de dichas variaciones.

En el caso a), para dos de las figuras no es posible obtener otra que tenga mayor área e igual perímetro. Si las figuras son convexas, cualquier variación que implique aumentar el área, aumentará, a la vez, el perímetro. En el caso b), en cambio, es posible realizar las transformaciones necesarias para todas las figuras dadas, ya que si se le quita una sección a la figura, se disminuye el área y se aumenta el perímetro. Este análisis que se les propone aquí a los alumnos posibilitará establecer nuevas afirmaciones generales similares a las planteadas al finalizar la secuencia.

Un punto a considerar y decidir es el de la distribución de las situaciones para la enseñanza de las nociones de medida en la planificación anual. Una idea que puede resultar interesante es que las situaciones planteadas puedan ser organizadas en “secuencias de problemas de medidas” para ser tratadas en distintos momentos del ciclo lectivo y durante todo el año escolar, articulando el trabajo con el desarrollo de los saberes incluidos en el Eje “Número y Operaciones”. Esta organización garantizaría para los alumnos prácticas recurrentes en tiempos no sucesivos y sin asignar a estos contenidos una unidad (en general la última) del plan anual.

Para trabajar con la información

Tal como hemos planteado, el trabajo sobre el tratamiento de la información es transversal a los ejes de contenidos. En el caso de los problemas espaciales, geométricos y de medida, este trabajo también concierne a la consideración de aspectos que pueden ser retomados en algunas de las actividades planteadas. Es el caso de la actividad sobre el croquis de una escuela de la página 131, donde hay información en un dibujo y en un texto. Aquí, la información del dibujo permite determinar cuál es la ubicación de cada ambiente. Si no se diera el dibujo, no se conocería la forma del espacio a distribuir para las distintas aulas. Otro caso es el de la consideración del número de patios que se pueden armar en la actividad 2 de la página 170. Se podría discutir con los alumnos la forma de realizar una búsqueda exhaustiva de todos los patios posibles de área 10. Si bien aquí hemos mostrado sólo dos ejemplos, combinar los modos de presentar la información y analizar cuando sea pertinente el número de soluciones son aspectos que permitirán al docente enriquecer el trabajo con problemas.

En diálogo
siempre abierto

Las propuestas y la realidad del aula

Para ampliar el repertorio y recrear las actividades

Al desarrollar el enfoque para trabajar en la clase de Matemática, hemos insistido en las elecciones que debemos realizar respecto de los tipos de problemas, sus modos de presentación y su secuenciación. También hemos señalado que la gestión de la clase será determinante respecto del sentido que los alumnos construyen sobre las nociones matemáticas, tanto por las interacciones que el docente promueva entre los alumnos y con las situaciones como por sus propias intervenciones a lo largo del proceso de enseñanza.

Por otra parte, hemos planteado que es necesario incorporar, más allá de la resolución de problemas, otras actividades, pues este no debiera ser el único tipo de práctica matemática que funcione en el aula, ya que es fundamental que las clases incluyan instancias de reflexión sobre lo que se ha realizado. En estas instancias, podrán plantearse, por ejemplo, actividades de comparación de problemas realizados con alguna operación, o de comparación de diferentes estrategias para resolver un cálculo, algunas acertadas y otras no. También se podrá poner en consideración de los alumnos la recuperación de las propiedades de cada una de las figuras que han estudiado, a modo de síntesis.

Para comparar problemas, es posible revisar lo trabajado en el cuaderno durante una semana y señalar todos los problemas que se resolvieron con una determinada operación para comparar los enunciados, encontrar semejanzas y diferencias[1] y pensar nuevos enunciados que podrían resolverse con la misma operación.

En el caso de querer comparar estrategias de cálculo, se puede recuperar, por ejemplo, el repertorio de sumas de fracciones que ya hayan memorizado todos los alumnos y registrarlo a modo de síntesis en un afiche que se cuelgue en el aula para luego utilizar esos resultados como ayuda para resolver otros cálculos.

[1] Un ejemplo de este tipo de actividad se presenta en este *Cuaderno*, en el apartado “Plantear situaciones para operar con cantidades expresadas en fracciones o decimales con distintos significados”, en el que se presenta un fragmento de registro de clase.

Entre ellos, se podrá señalar cuáles son los que ya conocen de memoria y cada chico podría ir armando una tarjeta con todos los cálculos que él sabe o las propiedades que conoce y, de este modo, tomar conciencia de su progreso.

Asimismo, en este apartado queremos avanzar sobre actividades que forman parte de la tradición escolar: las tareas para el hogar, y precisar algunas cuestiones relacionadas con el Segundo Ciclo. Estas tareas, pensadas para que el alumno las desarrolle fuera de la escuela, renuevan su sentido en relación con los aprendizajes prioritarios y con el tiempo necesario de apropiación individual de los conocimientos trabajados en clase.

La realidad compleja con la que hoy interactúa la escuela presenta aspectos que pueden hacer difícil llevar adelante el estudio. Sin embargo, aun en este escenario, es posible plantear alguna actividad desafiante para resolver fuera del aula. En este sentido, es imprescindible asegurarnos de que todos hayan comprendido cuál es el desafío que se propone, para evitar la creación de un obstáculo excesivo para los niños, o para los adultos que los acompañan cuando realizan sus tareas, que podrían intervenir en una dirección distinta de la que pretendemos.

Deberemos ser muy claros para distinguir si la tarea debe hacerse con o sin ayuda y, en este último caso, precisar cuál es la ayuda que se espera. En el caso de los alumnos del Segundo Ciclo, a diferencia de los de Primer Ciclo, es posible pensar en una mayor independencia de los adultos en la realización de estas tareas. Esto requiere que los mayores comprendan la importancia de este planteo y, al mismo tiempo, exige que las características de las actividades sean lo suficientemente similares y, a su vez, diferentes respecto de las discutidas en clase, de tal manera que todos los alumnos comprendan lo que se espera de ellos como producción; que tengan asegurado un lugar de importancia en el proyecto de aprendizaje del docente y que se garanticen con ellas verdaderas situaciones de aprendizaje para los alumnos.

Las actividades que se pueden plantear para realizar fuera de la clase también podrán ser de distinto tipo. Por ejemplo, se podría seleccionar un conjunto de cuentas ya resueltas y pedir la comparación de los números que intervienen en los cálculos y los resultados para analizar semejanzas y diferencias y advertir regularidades. O también, proponer partidas simuladas sobre un juego que se realizó en clase en donde intervengan los números y cálculos con los que se estuvo trabajando y que den lugar a la práctica del cálculo mental.

En cualquier caso, recuperar lo producido fuera de la escuela supone mucho más que “corregir” la tarea: se trata, en cambio, de organizar una nueva actividad diseñada de modo que tome como punto de partida lo realizado fuera de clase. Así, también es una excelente oportunidad para una interacción más personalizada con los alumnos y sus dificultades. Nos estamos refiriendo a plantear una tarea focalizada en aquellos aspectos que necesite profundizar cada niño o cada grupo. Todo esto permite que el alumno perciba que se valora su producción individual, al mismo tiempo que él mismo valore el tiempo que dedica para su estudio individual como una instancia más de su proceso de aprendizaje.

Para construir espacios de debate

Todas las actividades propuestas en este *Cuaderno* están sostenidas y fundamentadas en una concepción del aprendizaje que implica una idea de lo que pensamos que debiera significar "hacer matemática" para los alumnos. Sin embargo, para transmitir y sistematizar esta idea del quehacer matemático a los niños y niñas no es suficiente proponerles actividades "interesantes" que propicien en los alumnos aprendizajes diferentes y que los desafíen a buscar estrategias propias de resolución. Esperamos también que los alumnos desarrollen recursos de control sobre sus procedimientos y los ajenos, puedan fundamentar sus estrategias y argumentar en favor de ellas, descentrarse de sus producciones e introducirse en las de sus compañeros, siendo capaces de apoyarlas o criticarlas con fundamentos matemáticos.

Hay momentos de la clase que son especialmente propicios para lograr este tipo de aprendizaje. Por eso afirmamos que además de la buena selección de actividades es fundamental tener en cuenta la organización y gestión de la clase que el docente es capaz de llevar a cabo para alcanzar estos objetivos. Los espacios de debate, como la confrontación de procedimientos, ponen a los alumnos en la situación de tener que dar cuenta de las estrategias utilizadas y de entender estrategias ajenas. Cuando los niños tienen que explicar a sus compañeros algo que no entienden, o hacerles entender por qué dicen que "está mal" o "está bien" tal o cual cosa, es cuando se les genera la necesidad de pensar la forma más clara de comunicar sus argumentos y fundamentos. Este es un plus frente a la actividad de resolver un problema, porque implica un trabajo de comprensión y dominio de la situación mucho mayor que solo resolverlo. El hecho de justificar "qué se hizo", "cómo se hizo" "por qué se hizo" "si está mal o bien" implica de hecho una reflexión sobre la tarea realizada y una nueva mirada sobre el problema, pero desde la posición de alguien que ya lo ha "desmenuzado", porque ya lo ha resuelto. Es decir, lo que les pedimos a los alumnos en estos momentos de debate involucra un aprendizaje diferente (y más complejo) del que implica la resolución de la actividad planteada. De aquí que la falta de gestión de estos espacios de debate limite los aprendizajes matemáticos en los alumnos. Desde la perspectiva de esta concepción del aprendizaje, no es lo mismo realizar una confrontación que no hacerlo, pues estos espacios son el corazón mismo de la diferencia en los aprendizajes que esperamos propiciar en los alumnos desde esta propuesta.

La organización y gestión de estos espacios de debate entre los alumnos implica también un aprendizaje por nuestra parte, ya que debemos aprender cómo intervenir, de manera de propiciar este tipo de aprendizajes en los alumnos. Cuando los alumnos comienzan a producir solos y aparecen diferentes procedimientos, de diferentes niveles de complejidad, con diferentes tipos de errores, se presenta la dificultad para nosotros, por un lado, para decidir qué discutir y, por el otro, para saber cómo hacer para que los alumnos hablen y se pongan a discutir acerca de sus producciones. Decidir cuáles podrían ser buenas preguntas y cuáles desorientan más aun al alumno en este nuevo tipo de trabajo en el que estamos embarcándolo es un desafío permanente. Es muy útil y conveniente en un primer momento no realizar preguntas abiertas como *A ver, Juan, ¿qué te parece este procedimiento?,* ya que la amplitud de la pregunta hace que un alumno que se está iniciando en este tipo de trabajo no pueda imaginarse cuál podría ser una respuesta razonable en este caso. En cambio, preguntas como *A ver, Juan, fijate en lo que hizo Martín en esta cuenta, ¿qué son estos números?, ¿manzanas?, ¿cajones?, ¿qué tiene que ver esta cuenta con el enunciado del problema? ¿Para qué creés que la hizo?,* son más concretas y más fáciles para imaginarse una posible respuesta.

También es conveniente que estemos atentos especialmente a que estos debates no se transformen en una corrección de los procedimientos utilizados, en los que nuestra intervención esté asociada al control de lo realizado. Si es el docente el que finalmente tiene la palabra y queda depositado solo en él dar o no por válido lo que se hizo, los alumnos no sienten la necesidad de emitir su opinión más que para rendir examen frente al maestro y frecuentemente no se muestran interesados en responder a las preguntas que este formula en ese momento de trabajo colectivo. En ese caso, la matemática sería vivida como una serie de reglas y definiciones predeterminadas que hay que reconocer y aplicar.

Si, en cambio, nuestra intervención en el debate intenta recuperar lo que los alumnos están haciendo y promovemos la discusión alrededor de esas producciones, habrá un verdadero espacio de discusión, una situación genuina de comunicación en la que intercambiarán distintos puntos de vista, para llegar a una conclusión aceptada por el conjunto de la clase. En este caso, el trabajo se valida por la comunidad clase, y el maestro interviene conduciendo el debate entre los chicos o introduciendo preguntas nuevas y sistematizando las conclusiones a las que se arribe; en principio, estas conclusiones podrán ser registradas tal como las formulen los alumnos aunque su expresión no se ajuste completamente a las expectativas del docente. En una etapa posterior se podrán revisar estas enunciaciones y, por ejemplo, compararlas con lo que se dice al respecto en un libro de texto, para avanzar en el uso del vocabulario específico y/o discutir cuestiones ligadas al uso de distintas anotaciones. Asimismo se podrá volver sobre estos enunciados para analizar su "campo de validez" y modificarlos, si fuera necesario, para avanzar en el nivel de generalidad de lo que se afirma, ya que algunas afirmaciones son verdaderas en un campo numérico, o para un conjunto de figuras, y no lo son para otro.

Si esta práctica forma parte de lo que queremos enseñar, es imprescindible considerar que necesita construirse a lo largo de toda la escolaridad, teniendo en cuenta las características propias de los niños en cada etapa.

Las propuestas incluidas en este *Cuaderno* forman, sin duda, una pequeña colección de casos con algunas sugerencias para su implementación y gestión. Su uso en el aula dependerá de las decisiones que, al respecto, se tomen en cada institución, atendiendo tanto a los proyectos institucionales como a las particularidades de cada grupo de alumnos y de la comunidad.

En muchas ocasiones, la lectura y discusión de estos casos derivará, seguramente, no en la "aplicación" de los ejemplos analizados, sino en nuevas propuestas adaptadas tanto a los conocimientos del grupo de alumnos como a la forma de trabajo del docente que las desarrolle.

En este sentido, resultará muy interesante el debate que se genere en el equipo de la escuela a propósito de su uso, los intercambios de lo ocurrido en las puestas en aula con los colegas y la sistematización de las nuevas propuestas que se puedan formular.

Del mismo modo, la consulta de los materiales recomendados en la sección "Bibliografía" de este *Cuaderno* permitirá ampliar la perspectiva presentada, multiplicar la variedad de propuestas y abrir nuevas preguntas sobre la enseñanza de la Matemática.

Bibliografía

Bibliografía recomendada para docentes

BROITMAN, C. e ITZCOVICH, H. (2001), *Aportes didácticos para el trabajo con la calculadora en los tres ciclos de EGB. Documento N° 6*, Gabinete pedagógico curricular. Dirección General de Cultura y Educación de la provincia de Buenos Aires (también disponible en Internet).

CHEMELLO, G. (COORD.), HANFLING, M. y MACHIUNAS, V. (2001), *El juego como recurso para aprender. Juegos en Matemática EGB 2* (material para docentes y recortable para alumnos), Buenos Aires, Ministerio de Educación, Ciencia y Tecnología (también en Internet).

FUENLABRADA, I., BLOCK, D., BALBUENA H., CARVAJAL, A. (2000), *Juega y aprende Matemática. Propuestas para divertirse y trabajar en el aula,* Buenos Aires, Novedades Educativas.

LERNER, D. y SADOVSKY, P. (1994), "El sistema de numeración, un problema didáctico", en PARRA, C. y SAIZ, I. (comps.), *Didáctica de las Matemáticas. Aportes y reflexiones,* Buenos Aires, Paidós.

PANIZZA, M. (2003), "Reflexiones generales acerca de la enseñanza de la Matemática", en *Enseñar Matemática en el Nivel Inicial y el Primer Ciclo de la EGB.* Análisis y propuestas, Buenos Aires, Paidós.

PONCE, H. (2000), *Enseñar y aprender Matemática. Propuestas para el Segundo Ciclo*, Buenos Aires, Novedades Educativas.

PUJADAS, M. y EGUILUZ, M. L. (2000), *Fracciones, ¿un quebradero de cabeza? Sugerencias para el aula,* Buenos Aires. Novedades Educativas.

SADOVSKY, P. (COORD.), LAMELA, C. y CARRASCO, D. (2005), *Matemática. Fracciones y números decimales. Apuntes para la enseñanza. 5° grado. Apuntes para la enseñanza.* Gobierno de la Ciudad de Buenos Aires, Secretaría de Educación, Dirección General de Planeamiento, Dirección de Currícula.

SADOVSKY, P. (COORD.), BROITMAN, C.; ITZCOVICH, H., QUARANTA, M. E. (2001), "Acerca de los números decimales. Una secuencia posible", en el documento *Aportes para el desarrollo curricular Matemática, GCBA* (también disponible en Internet).

SADOVSKY, P., PARRA, C., ITZCOVICH, H, BROITMAN. C. (1998), *Matemática. La enseñanza de la geometría en el Segundo Ciclo.* Documento de trabajo N° 5. Subsecretaría de Educación de la Ciudad de Buenos Aires, Dirección de Currícula (también disponible en Internet).

SAIZ, I. (1994), "Dividir con dificultad o la dificultad de dividir" en: PARRA, C. y SAIZ, I. (comps.), *Didáctica de las Matemáticas. Aportes y reflexiones,* Buenos Aires, Paidós.

Documentos curriculares para Nivel Primario - EGB 2, en Internet

La enseñanza de la división en los tres ciclos.
La enseñanza de la geometría en la EGB.
La enseñanza de la multiplicación en los tres ciclos.
Aportes didácticos para el trabajo con la calculadora en los tres ciclos de EGB.
En: http://abc.gov.ar/LaInstitucion/SistemaEducativo/EGB/default.cfm

Matemática. Documento de trabajo N° 4. Actualización curricular, 1997.
Matemática. Documento de trabajo N° 5. Actualización curricular, 1998.
En: http://www.buenosaires.gov.ar/educacion/docentes/planeamiento/primaria.php

Enseñar Geometría en el 1° y 2° Ciclo. Diálogos de la capacitación.
En: http://www.buenosaires.gov.ar/areas/educacion/cepa/geometria.pdf

Acerca de los números decimales. Una secuencia posible.
En: http://www.buenosaires.gov.ar/areas/educacion/curricula/primaria.php

Desarrollo curricular N° 1.
La división por dos cifras: un mito escolar. Desarrollo curricular N° 5.
La estimación, una forma importante de pensar en Matemática.
La medida, un cambio de enfoque. Desarrollo curricular N° 4.
Las regularidades: fuente de aprendizaje matemático.
Desarrollo curricular N° 3.
Una forma de uso de la proporcionalidad: las escalas.
Desarrollo curricular N° 2.
En: http://www2.educacion.rionegro.gov.ar/v2005/gcurri/matematica/matemat.htm

Propuestas para el aula. Material para docentes. Matemática EGB 2.
Juegos en Matemática EGB 2. El juego como recurso para aprender (material para alumnos). Subsecretaría de Educación Básica, Ministerio de Educación.
Juegos en Matemática EGB 2. El juego como recurso para aprender (material para docentes). Subsecretaría de Educación Básica, Ministerio de Educación.
En: http://www.me.gov.ar/curriform/matematica.html

SECRETARÍA DE EDUCACIÓN DE LA MCBA, Pensando en la enseñanza. Preguntas y respuestas, Buenos Aires, Secretaría de Educación de la MCBA.
En: http://www.buenosaires.gov.ar/areas/educacion/curricula/docum/areas/matemat/doc5.pdf

Bibliografía general de consulta

ARTIGUE, M., DOUADY, R. y OTROS (1995), *Ingeniería didáctica en educación matemática,* Bogotá, Grupo Editorial Iberoamericano.

BARALLOBRES, G., CHARA, S. y SCHAPOSCHNIK, R. (2001), *Matemática 5. Serie Siempre más*. Buenos Aires. Aique.

BROUSSEAU, G. (1987), *Fundamentos y métodos de la didáctica de la Matemática,* Córdoba, Facultad de Matemática, Astronomía y Física, Universidad Nacional de Córdoba.

CHEVALLARD, I. (1997), *La transposición didáctica. Del saber sabio al saber enseñado*, Buenos Aires, Aique.

CHEVALLARD, I., GASCÓN, J. y BOSCH, M. (1997), *Estudiar Matemática. El eslabón perdido entre la enseñanza y el aprendizaje,* Barcelona, Ice-Horsori.

LABORDE, C., VERGNAUD, G. (1997), "El aprendizaje y la enseñanza de la matemática" en VERGNAUD, G. (comp.), *Aprendizajes y Didácticas. ¿Que hay de nuevo?* Buenos Aires. Edicial.

PANIZZA, M. (comp.) (2003), *Enseñar Matemática en el Nivel Inicial y el Primer Ciclo de la EGB. Análisis y propuestas,* Buenos Aires, Paidós.

PARRA, C. y SAIZ, I. (comps.) (1994), *Didáctica de las Matemáticas. Aportes y reflexiones,* Buenos Aires, Paidós.

Plan de Compensación. Ciclo lectivo 2000. Primer Documento de Orientación. Ministerio de Educación de la provincia de Corrientes.

SAIZ, I. (1992), *Asesoría Técnico-Pedagógica.* Consejo General de Educación de la provincia de Corrientes.

---------- (1999), *Hacer Matemática 2,* Libro para el docente, Buenos Aires, Estrada.

SAIZ, I., CAMERANO, C. y BARRIONUEVO, C. (1999), *Documento de apoyo N° 4/99.* "Matemática. La estimación de resultados", Asesoría Técnico-Pedagógica, Consejo General de Educación de la provincia de Corrientes.

VERGNAUD, G. (1991), *El niño, la matemática y la realidad,* México, Trilla.

Se terminó de imprimir
en el mes de enero de 2007 en
Gráfica Pinter S.A.,
México 1352
Ciudad Autónoma de Buenos Aires