## Capítulo 17
## Construcciones de Mascheroni

Se dice con frecuencia que los geómetras, obedeciendo una norma tradicional atribuida a Platón, construían todas sus figuras planas ayudándose tan sólo de compás y regla (no graduada). Esto no es exacto. Los griegos se sirvieron de muchos otros instrumentos geométricos, entre ellos, de utensilios para trisecar ángulos. Mas, por otra parte, sí estaban convencidos de que las construcciones con regla y compás eran más elegantes que las conseguidas mediante otros instrumentos. La futilidad de sus tenaces esfuerzos por lograr métodos de este tipo en la trisección de ángulos, la cuadratura del círculo o la duplicación del cubo, los tres grandes problemas geométricos de antigüedad, no pudo ser demostrada durante cerca de 2.000 años.

En siglos posteriores, los geómetras se entretuvieron en imponer restricciones todavía más enérgicas sobre los instrumentos utilizables en los problemas de construcción de figuras. El primer esfuerzo sistemático de esta naturaleza es un trabajo atribuido al matemático persa Abul Wefa, en el siglo x, donde se describen construcciones posibles con la regla y un compás «rígido», más tarde llamado, burlonamente, «compás oxidado». Se trata de un compás cuya apertura no puede modificarse, Los conocidos procedimientos para trazar la mediatriz de un segmento o la bisectriz de un ángulo son ejemplos sencillos de construcciones con regla y compás rígido.

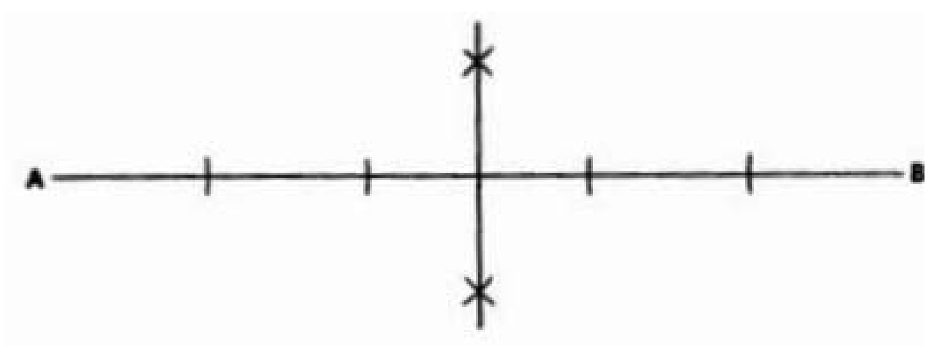


*Figura 87. Trazado de la mediatriz de un segmento arbitrario con un "compás oxidado"*

En la Figura 87 vemos cuán fácilmente podemos servirnos de un compás oxidado para hallar la mediatriz de un segmento de longitud al menos doble de la apertura del compás. Muchas de las soluciones de Abul Wefa, y, en particular, su método de construcción del pentágono regular conocido el lado son extraordinariamente ingeniosas y muy difíciles de mejorar

La Figura 88 muestra cómo utilizar un compás oxidado para trazar una recta paralela a la recta *AB* que pase por un punto *P* cualquiera, exterior a ella. Para lograrlo se construyen en tres pasos los vértices de un rombo; el método es tan sencillo que una ojeada a la figura permite comprenderlo. Aunque conocido desde por lo menos 1574, el método es constantemente redescubierto y publicado como original (véase, por ejemplo, *Mathematics Teacher*, febrero de 1973, p. 172).

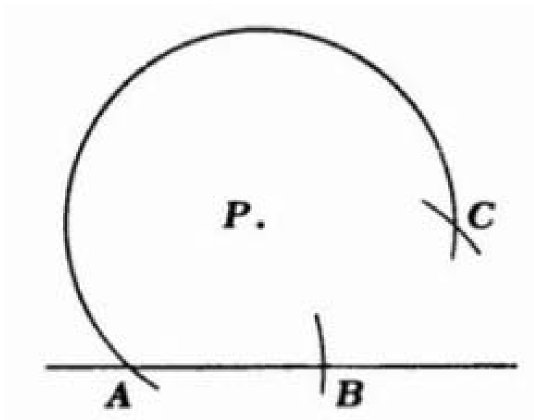


*Figura 88. Construcción de una recta paralela con ayuda de un compás oxidado*

Leonardo da Vinci y numerosos matemáticos renacentistas hicieron también algunos tanteos en la geometría de compás rígido, pero, en orden de importancia, el segundo tratado sobre el tema fue *Compendis Euclidis Curiosi*, folleto de autor anónimo, publicado en 1673, en Amsterdam. Fue traducido al inglés cuatro años más tarde, por Joseph Moxon, a la sazón hidrógrafo real en Inglaterra. Se sabe ahora que esta obrita fue escrita por un geómetra danés, Georg Mohr, con quien volveremos a tropezar dentro de un momento. En 1694, un agrimensor londinense, William Leybourn, en un extravagante libro llamado *Pleasure with Profit*, trató las construcciones de compás rígido como una forma de juego matemático. En el encabezamiento de su sección dedicada al tema escribió: «Mostrando cómo (sin compás), teniendo solamente un Tenedor Corriente (o una horquilla semejante, que no abriré ni cerraré), y una Regla Lisa, pueden realizarse muchas deliciosas y divertidas Operaciones Geométricas.»

Ya en el siglo XIX, el matemático francés Jean Víctor Poncelet sugirió una demostración, más tarde rigurosamente desarrollada por el suizo Jakob Steiner, de que todas las construcciones realizables con regla y compás ordinario son realizables también con regla y un compás rígido. Tal conclusión resulta inmediatamente de otro notable teorema de ambos, a saber, que toda construcción que sea factible con regla y compás es posible con sólo la regla, una vez dada en el plano una circunferencia fija y su centro. A principios del siglo XX se demostró que ni siquiera hacía falta disponer de la totalidad de la «circunferencia de Poncelet-Steiner». ¡Tan sólo se precisan un arco de esta circunferencia, por pequeño que sea, y su centro! (En las construcciones de este tipo se admite que un círculo ha quedado construido cuando se determinan su centro y un punto de su circunferencia.)

Muchos matemáticos de renombre habían estudiado qué construcciones son posibles con instrumentos tan sencillos como la regla sola, la recta provista de dos puntos marcados sobre ella, la regla de dos bordes rectos paralelos, la «regla» con dos bordes rectos perpendiculares (escuadra) o bajo otros ángulos, etc. Así las cosas, en 1794 el geómetra italiano Lorenzo Mascheroni dejó maravillado al mundo matemático al publicar su *Geometria del Compasso*, donde demostraba que toda construcción realizable con regla y compás puede efectuarse con exclusivamente un compás móvil. Como es imposible dibujar líneas rectas con sólo un compás, es preciso admitir que dos puntos, obtenidos por intersección de arcos, definen una recta.

Todavía hoy se llaman construcciones de Mascheroni a las realizadas exclusivamente con el compás, a pesar de que en 1928 se descubrió que Mohr había demostrado el mismo teorema en una oscura obrita, *Euclides Danicus*, publicada en 1672 en ediciones danesa y holandesa. Un estudiante danés dio con el libro en una librería de lance de Copenhague, y se lo mostró a su profesor, Johannes Hjelmslev, de la Universidad de Copenhague, quien inmediatamente comprendió la importancia del descubrimiento. Hjelmslev la publicó en edición facsímile, acompañada de una traducción al alemán, el mismo año de 1928.

Los geómetras contemporáneos han perdido interés por las construcciones Mohr-Mascheroni, pero en razón de los muchos problemas de índole recreativa que contienen, su puesto ha sido ocupado por los aficionados. El reto planteado a éstos consiste en mejorar las construcciones conocidas, lográndolas en menor numero de pasos. En ocasiones es posible perfeccionar los métodos de Möhr o de Mascheroni; en otras, no.

Fijémonos, por ejemplo, en la más sencilla de las cinco soluciones que dio Mascheroni a su problema Nº. 66, que pide hallar un punto alineado con otros dos y equidistante de ambos. (Véase la Figura 89).

Sean *A* y *B* los puntos dados. Se trazan dos circunferencias de radio *AB* con centros en *A* y en *B*. Conservando la misma apertura del compás, y tornando como centros *C* y *D*, marcamos los puntos *D* y *E*. (Los lectores recordarán sin duda que así comienza el procedimiento para dividir una circunferencia en seis arcos iguales, o en tres arcos iguales, si los puntos de división se toman alternativamente.) El punto *E* se encontrará en la prolongación hacia la derecha de la recta *AB*, y *AE* será doble de *AB*. (Como es obvio, tal procedimiento puede reiterarse a la derecha, y duplicar, triplicar o producir un múltiplo cualquiera de la longitud *AB*.) Se abre el compás con el radio *AE* y se traza un arco, de centro *E*, que interseca a la circunferencia de la izquierda en *F* y en *G*. Volvamos a cerrar el compás, tomando el radio *AB* una vez más. Con centros *F* y *G* se trazan dos arcos, que al cortarse, determinan el punto *H*.

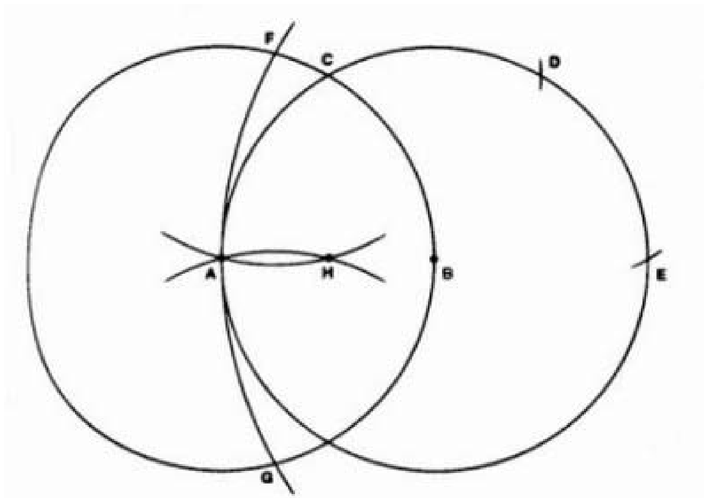


*Figura 89. Método de Mascheroni para hallar un punto H alineado equidistante de los puntos A y B, con sólo el compás*

El punto *H* está alineado Y equidista de *A* y de *B*. La primera parte es fácil de admitir, por razones de simetría. La equidistancia se prueba observando que los triángulos isósceles de vértices *AFH* y *AFE* tienen común el ángulo (en la base) *FAE*, y por consiguiente, son semejantes. *AF* es la mitad de *AE*; luego *AH* es la mitad de *AB*. Los lectores familiarizados con la transformación de inversión ya se habrán dado cuenta de que el punto *H* es el inverso de *E* respecto de la circunferencia izquierda. Puede verse una demostración sencilla de esta propiedad en *What Is Mathematics?* (traducción española, *¿Qué es la matemática?.* Ed. Aguilar, Madrid) de Richard Courant y Herbert Robbins, p. 145. Observemos que si al principio hubiéramos trazado el segmento *AB*, y el problema consistiera en hallar su punto medio, con sólo el compás, bastaría trazar únicamente el segundo de los dos últimos arcos, reduciendo así a seis el número de etapas. No conozco para este problema soluciones más breves.

Otro famoso problema resuelto por Mascheroni fue la determinación del centro de una circunferencia. Su método es demasiado complicado para ser expuesto aquí, pero afortunadamente hay una versión simplificada, de origen desconocido, que suele venir en libros de geometría un poco antiguos. Podemos verla en la Figura 90.

Sea *A* un punto cualquiera de la circunferencia. Tomando el centro *A*, abrimos el compás y trazamos un arco que intercepte a la circunferencia en *B* y *C*. Con radio *AB* y centros en *B* y *C* trazamos arcos, que se cortarán en *D*. (El punto *D* puede estar dentro de la circunferencia o debajo de ella, según la apertura inicial del compás.) Con radio *AD* y centro en *D* trazamos el arco que da las intersecciones *E* y *F*. Con radios *AE* y centros *E* y *F* trazamos arcos, que se interceptan en *G*. El punto *G* es el centro de la circunferencia. Como antes, podemos demostrarlo fácilmente, pues los triángulos isósceles de vértices *DEA* y *GEA* tienen igual ángulo básico *EAG*, y por consiguiente, son semejantes. El resto de la demostración, así como otra basada en la inversión, puede verse en *The Surprise Attack in Mathematical Problems*, de L. A. Graham, (Dover, 1968), problema nº 34.

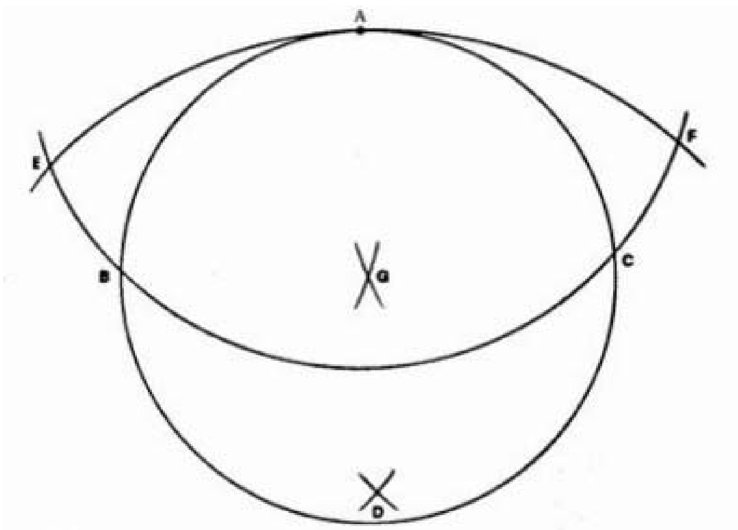


*Figura 90. Cómo hallar el centro de una circunferencia en seis pasos, con compás solamente*

Un tercer famoso problema del libro de Mascheroni es el llamado «problema de Napoleón», porque se dice que Napoleón se lo propuso a Mascheroni. No suele saberse que Napoleón era entusiasta matemático aficionado, y aunque tal vez no muy penetrante, sin duda estaba fascinado por la geometría, ciencia, por otra parte, de gran importancia militar. Además, Napoleón sentía ilimitada admiración por los creativos matemáticos franceses contemporáneos suyos. Gaspard Monge, uno de ellos, parece haber sido el único hombre con quien Napoleón mantuvo amistad permanente. Los aficionados a las matemáticas recreativas recordarán a Monge sobre todo por las barajaduras de su nombre, que analizó siendo todavía muy joven. En ellas, las cartas van siendo extraídas una por una del mazo con el pulgar de la mano izquierda, y van siendo colocadas alternativamente encima y debajo de las cartas de la mano derecha. «Monge me quiso como se adora a un amante», confesó Napoleón en una ocasión. Monge fue uno de los varios matemáticos franceses que recibieron de Napoleón títulos de nobleza. Cualquiera ha oído hablar de la capacidad geométrica de Napoleón; es mérito suyo haber revolucionado de tal forma la enseñanza de las matemáticas en Francia, que según varios historiadores, sus reformas fueron las causantes de la floración de matemáticos creadores orgullo de la Francia decimonónica.

Al igual que Monge, el joven Mascheroni fue ardiente admirador de Napoleón y de la Revolución Francesa, Además de profesor de la Universidad de Pavía, fue poeta muy considerado por la crítica italiana. Existen varias ediciones italianas de sus poesías completas. Su libro *Problems for Surveyors* tenía una dedicatoria en verso para Napoleón. Ambos hombres se conocieron en 1796, cuando Napoleón invadió el norte de Italia, y llegaron a ser amigos. Un año después, cuando Mascheroni publicó su libro dedicado a construcciones con sólo compás, volvió a honrar a Napoleón con una dedicatoria, esta vez una extensa oda.

Napoleón conocía a fondo muchas de las construcciones de Mascheroni. Se dice que en 1797, mientras Napoleón hablaba de geometría con Joseph Louis Lagrange y Pierre Simon de Laplace (famosos matemáticos a quienes más tarde Napoleón haría conde y marqués, respectivamente) el pequeño general sorprendió a ambos, explicándoles algunas soluciones de Mascheroni que les eran totalmente desconocidas. Se dice que Laplace comentó: «General, esperábamos de vos cualquier cosa, excepto lecciones de geometría». Sea esta anécdota supuesta o verdadera, Napoleón sí dio a conocer la obra de Mascheroni a los matemáticos franceses. En 1798, un año después de la primera edición italiana, ya se había publicado en París una traducción de la *Geometría del compasso*.

El «problema de Napoleón» consiste en dividir un círculo de centro dado en cuatro arcos iguales, usando exclusivamente un compás. O dicho de otra forma, se trata de hallar los vértices de un cuadrado inscrito. Se muestra en la Figura 91 una hermosa solución, con sólo seis arcos.

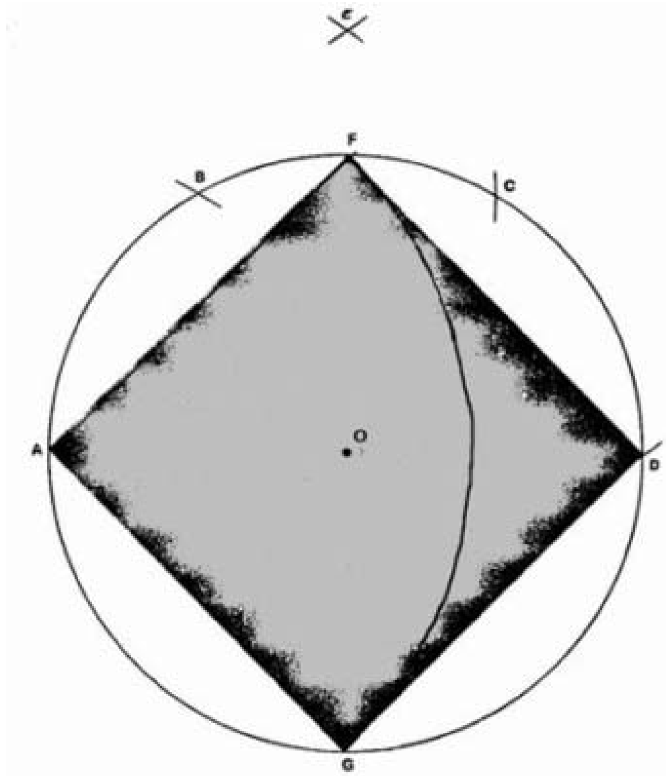


*Figura 91. Solución en seis pasos del "Problema de Napoleón"*

Tomando con el compás el radio del círculo, y a partir de un punto cualquiera *A* se marca los puntos *B, C* y *D*, haciendo centro en *A, B* y *C* respectivamente. Se abre el compás con radio *AC*. Con centros *A* y radio *DE* se traza el arco que corta a la circunferencia inicial en *F* y *G*. Los puntos *A, F, D* y *G* son los vértices del cuadrado inscrito. Desconozco si esta solución se debe a Mascheroni (pues su libro no ha sido traducido al inglés, y no he tenido acceso a las ediciones francesa ni italiana), o si se trata de un descubrimiento posterior. Henry Ernest Dudeney la presenta, sin demostración, en su *Modern Puzzles* (1926). Puede verse una demostración sencilla en *Mathematical Quickies*, de Charles W. Trigg (McGrawHill, 1967), problema nº. 248.

Dos problemas relacionados con éste, y no tan conocidos, son: (1) Dados dos vértices adyacentes de un cuadrado, determinar los otros dos, y (2), dados dos puntos diagonalmente opuestos de un cuadrado, hallar los otros dos. Dos lectores, Don G. Olmstead, y Paul White, me enviaron, independientemente uno de otro, soluciones de solo ocho arcos, que pueden verse, con demostración, en *Mathematical Entertainments*, de M. H. Greenblatt (Crowell, 1965), p. 139. Vemos el procedimiento en la Figura 92.

*A* y *B* son los dos puntos dados. Tras dibujar ambas circunferencias, las dos de radio *AB*, se mantiene la apertura del compás y se trazan los puntos *D* y *E*, haciendo centro en *C* y *D*. Se abre el compás hasta el radio *CE;* usando como centros *A* y *E* se trazan los dos arcos que se interceptan en *G*.

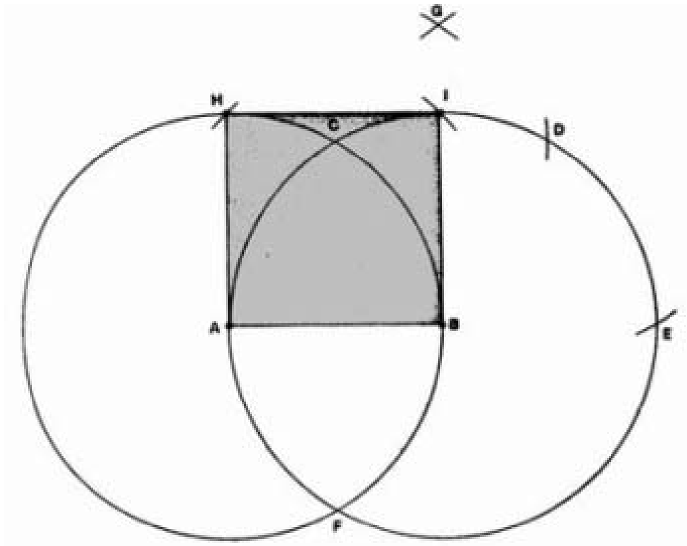


*Figura 92. Solución en ocho pasos de la construcción de un cuadrado, conocidos dos vértices adyacentes*

Tomando el radio *GB* y haciendo centro en *A* y *B*, se dibujan los arcos que cortan a las circunferencias en *H* e *I* Los puntos *H* e *I* son los otros vértices buscados.
La mejor de las soluciones que conozco del segundo (y más difícil) problema requiere nueve arcos. Invito a los lectores a buscar una, y si es posible, a mejorarla.

**Complementos**

Mannis Charosh me ha llamado la atención acerca de un teorema tan sorprendente como poco conocido, a saber, que todo punto construible mediante regla y compás puede ser obtenido también disponiendo de una colección ilimitada de mondadientes idénticos. Los palillos sirven para materializar segmentos rectilíneos rígidos e idénticos, libremente desplazables sobre el plano.
Este curioso método de construcción fue inventado por T. R. Dawson, redactor jefe de *Fairy Chess Review*, y ha sido expuesto por él mismo en un articulo titulado «"Match-Stick" Geometry», en *Mathematical Gazette*, Volumen 23, mayo de 1939, pp. 161-68. Dawson demuestra allí el teorema general antes citado, y demuestra también que será imposible construir mediante palillos puntos que no sean construibles por regla y compás. Da métodos para hallar el punto medio de un segmento, la bisectriz de un ángulo, para trazar perpendiculares y paralelas a una recta por un punto dado, así como para otras construcciones suficientes para demostrar su tesis.

Quedan ahora planteados innumerables problemas de carácter recreativo, prácticamente inexplorados, que piden hallar construcciones con número mínimo de palillos. Por ejemplo, el método óptimo de los descubiertos por Dawson para construir un cuadrado de lado unidad (igual a la longitud de un palillo) se muestra en la Figura 93, siendo *AF* una recta cualquiera contenida en el ángulo *BAC*. Se utilizan 16 palillos.

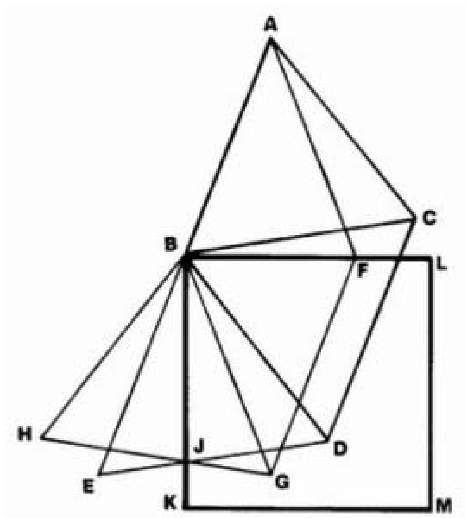


*Figura 93. Construcción de un cuadrado con 16 palillos*

Dawson afirma que para hallar el punto medio de un segmento de longitud unidad hacen falta cuando menos 11 palillos, y 13 para hallar un punto alineado y equidistante de otros, separados una unidad. Dawson desafía al lector a descubrir un método con 10 palillos para determinar el punto medio de dos puntos separados más de una unidad, pero menos de la raíz cuadrada de 3.

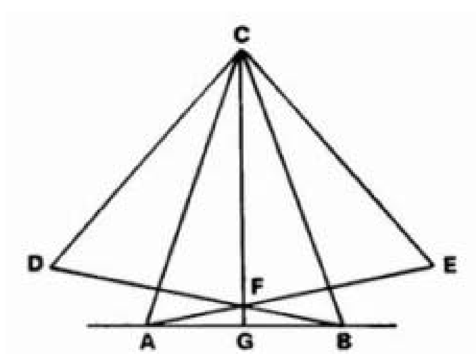


*Figura 94. Bisección de un ángulo con cinco palillos*

La Figura 94 muestra un método sencillo para bisecar con cinco palillos un ángulo cualquiera no mayor de 120 grados, y distinto de 60 grados. El método permite también trazar la perpendicular desde *C* a la recta *AB*. Para prolongar rectas o trazar rectas paralelas basta ir adosando tantos triángulos equiláteros como sean necesarios.

**Soluciones**

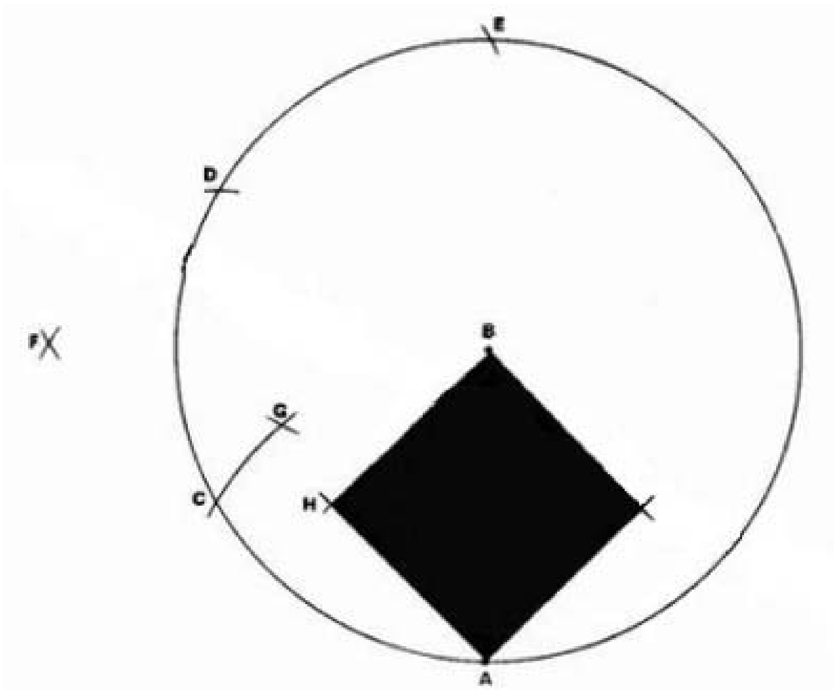


*Figura 95. Construcción de un cuadrado, conocidos dos vértices diagonalmente opuestos, usando solo el compás*

La Figura 95 muestra una solución en nueve pasos del siguiente problema de Mascheroni: dados dos vértices diagonalmente opuestos de un cuadrado, hallar los otros dos vértices usando solamente el compás. *A* y *B* son los vértices dados. Se traza el círculo de centro *B* y radio *AB*. Conservando la misma apertura de compás, se trazan los arcos *C, D* y *E* (centros en *A, C* y *D*). Con radio *BF* y centro en *E* se traza el arco que intercepta en *G* a otro arco dibujado anteriormente. Tomando el radio *BG* y haciendo centro en *A* y en *B* se trazan los arcos que se cortan en *H* e *I* Los puntos *A, H, B* e *I* son los vértices del cuadrado pedido. Pueden darse demostraciones sencillas de la validez de esta construcción, basadas en que ciertos ángulos son rectos y en el teorema de Pitágoras, que dejamos al cuidado del lector. Ya publicado mi artículo sobre construcciones de Mascheroni pude confirmar que la solución del «problema de Napoleón» con seis arcos era efectivamente debida a Mascheroni. Fitch Cheney me envió un artículo suyo, «Can We Outdo Mascheroni?» (*The Mathematics Teacher*, vol. 46, marzo de 1953, pp. 152-156) donde presenta la solución de Mascheroni seguida de otra propia, más sencilla, con sólo cinco pasos.

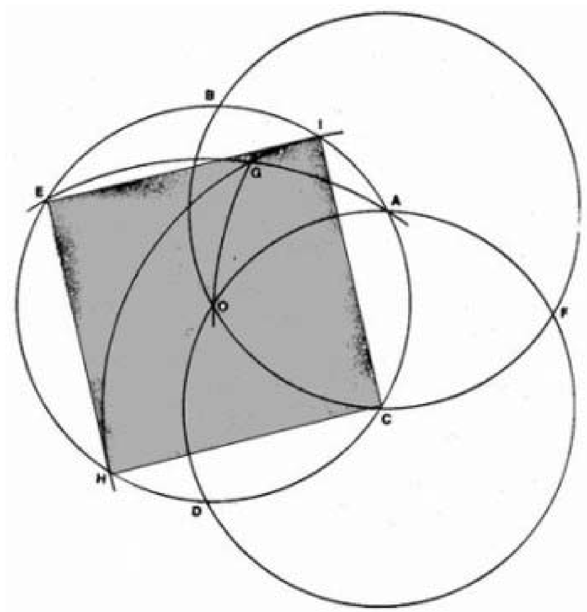


*Figura 96. Una solución simplificada del "problema de Napoleón"*

Vemos la solución de Cheney en la Figura 96. Se toma un punto cualquiera *A* de la circunferencia dada, y se traza una segunda circunferencia de radio *AO*. Con igual radio, y centro *C* se dibuja una tercera circunferencia; con centro *D* y radio *DA*, trazamos un arco que interseca al círculo inicial en *G*. Con radio *CG* y centro en *C* trazamos un arco que intercepta a la circunferencia inicial en *H* y en *I*. *E, I, C* y *H* definen los vértices del cuadrado pedido.

En su artículo, Cheney nos hace observar la diferencia entre el «compás moderno» que conserva su apertura al levantarlo del papel, como una bigotera, y el «compás clásico» de Euclides, que se cierra tan pronto uno de sus brazos se separa del plano. En contraste a la solución de Mascheroni, la de Cheney utiliza solamente arcos de compás clásico. Cheney da también en su artículo un método clásico, en siete etapas, para inscribir un pentágono en una circunferencia, dos pasos menos que la solución de Mascheroni, pese a que el método de éste requiere el compás moderno.

Muchos lectores se percataron de que el método de Mascheroni para construir un punto alineado y equidistante de otros dos podía abreviarse un paso. La distancia entre las intersecciones de las dos circunferencias de la Figura 89 es, evidentemente, igual a *CE*, por consiguiente, el punto *E* puede hallarse sin necesidad del paso intermedio encaminado a hallar *D*. Este procedimiento automáticamente rebaja en una unidad el número de arcos necesarios para bisecar un segmento, hallar los cuatro vértices de un cuadrado inscrito en un círculo dado («problema de Napoleón»), y dados dos vértices adyacentes de un cuadrado, hallar los otros dos.

El problema de hallar los otros dos vértices de un cuadrado cuando se dan dos vértices en oposición diagonal, problema cuya solución con nueve arcos he presentado ya, puede reducirse a ocho arcos adoptando el procedimiento recién descrito. Sin embargo, más de una docena de lectores descubrieron una preciosa solución con seis arcos (véase la Figura 97).

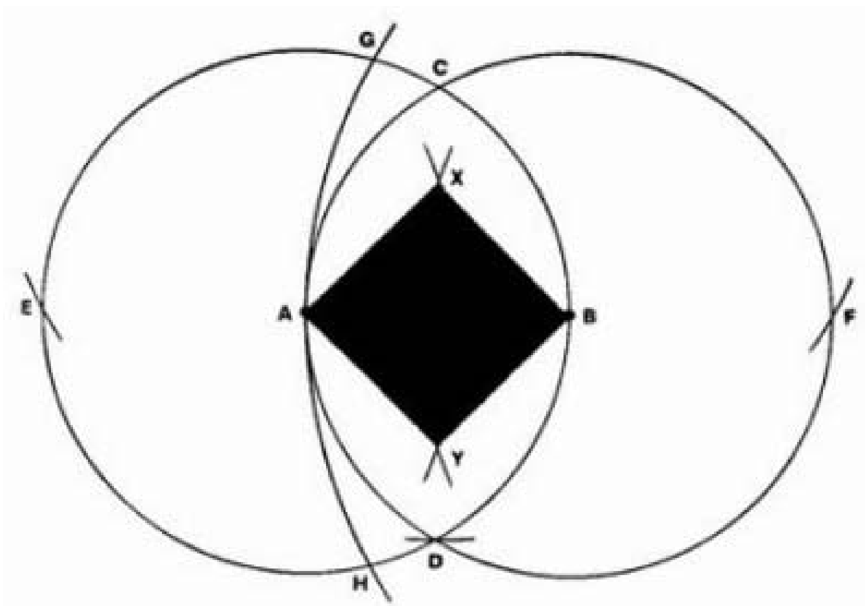


*Figura 97. Solución con seis arcos a uno de los problemas de Mascheroni*

*A* y *B* son los vértices dados. Tras dibujar las dos circunferencias que pasan por estos puntos, se abre el compás a la amplitud *CD*, y con centro *C* se traza el arco *EDF*. Con centro *F* y radio *AF* se traza el arco *GAH*. Tomando centros en *E* y *F* y radio *EG*, se dibujan los dos arcos que se interceptan en *X* e *Y*. No es difícil demostrar que *AXBY* son los vértices del cuadrado requerido.