Capítulo 15
La mesa giratoria y otros problemas

1. La mesa giratoria redonda

En 1969, tras 10 semanas de áspera porfía, las delegaciones encargadas de negociar la paz en Vietnam llegaron por fin a convenir la forma de la mesa de conferencias: un círculo donde habrían de acomodarse, equidistantes, las 24 personas. Aunque los asientos estaban reservados mediante tarjetas nominales, en una ocasión se produjo tal revuelo que los 24 negociadores tomaron asiento completamente al azar. Se descubrió entonces que ninguno ocupaba el lugar que le correspondía. Ahora, independientemente de cómo hayan tomado asiento, ¿será posible que girando la mesa al menos dos personas queden sentadas frente a la tarjeta que los identifica?

El problema es mucho más difícil si sólo hay una persona que haya encontrado su asiento. En ese caso, ¿será posible girar la mesa para que al menos dos personas queden situadas simultáneamente frente a su tarjeta?

2. Mate al primer jaque

En junio de 1916, una revista de ajedrez, *The British Chess Magazine* (vol. 36, nº 426), daba cuenta de que un aficionado americano, Frank Hopkins, había inventado una variante del ajedrez, que llamaba de «jaque único». El juego sigue exactamente las mismas reglas que el ajedrez ordinario, salvo en que la victoria es del primer jugador que consiga dar jaque (no necesariamente jaque mate) al rey contrario. La revista, que mencionaba como fuente un articulo de *The Brooklyn Daily Eagle*, daba cuenta de que «la sospecha de que las blancas tenían asegurada la victoria se convirtió en certeza», al declarar un día el gran maestro Frank J. Marshall que «podía reventar el nuevo juego». Hopkins no quedó convencido hasta que Marshall le dio una rápida paliza, moviendo solamente los dos caballos blancos. No se explicaba la estrategia de Marshall, salvo la jugada de apertura, ni la reseña del incidente daba tampoco el número de jugadas que tardó en producirse el jaque fatal.

Desde 1916, la idea de «mate al primer jaque» parece habérsele ocurrido a muchos aficionados. La primera noticia que tuve de él fue a través de Solomon W. Golomb, quien lo conocía como «presto chess», nombre que le puso David L. Silverman al serle explicado el juego por otro reinventor, ya en 1965. Antes, a fines de los 40, había sido puesto brevemente en circulación por un grupo de estudiantes de matemáticas de la Universidad de Princeton. Uno de ellos, William H. Mills, descubrió entonces la que sin duda debió ser estrategia de Marshall: una táctica mediante la cual las blancas, moviendo solamente los caballos, podían vencer lo más tarde en la quinta jugada. En 1969, Mills y George Soules descubrieron conjuntamente otras tácticas vencedoras de cinco jugadas con otras piezas. ¿Sabría usted repetir la hazaña de Marshall, resolviendo el problema propuesto en la Figura 78? ¿Cómo pueden lograr las blancas dar jaque al rey negro, moviendo solamente los caballos, lo más tarde en su quinto movimiento?

Figura 78. Las blancas mueven los caballos y logran dar jaque en cinco

Se han realizado diversos intentos para darle más interés al juego, añadiendo reglas. El propio Hopkins propuso comenzar la partida con los peones de ambos jugadores en la tercera fila en vez de la segunda. Sidney Sackson, quien me informó del artículo de 1916, sugiere que sea vencedor el primero en dar un número especificado de jaques, por ejemplo, entre cinco y diez, según la duración que se desee para la partida. Ignoro si estas propuestas consiguen suprimir eficazmente la ventaja de las blancas.

3. Juego de adivinación de palabras

Hacia 1965, Anatol W. Holt, matemático a quien le gusta inventar juegos nuevos, presentó el siguiente: Dos personas piensan cada una en una palabra «objetivo», ambas con igual número de letras. Los novatos deben comenzar con palabras de tres letras, e ir progresivamente aumentando su longitud conforme vayan adquiriendo más habilidad. Los jugadores van diciendo por turno «palabras de prueba» de la longitud acordada; su contrario debe responder diciendo si el número de aciertos es par o impar. El primero que descubre la palabra de su adversario gana la partida. Para mostrar que es posible determinar la palabra mediante análisis lógico, sin necesidad de tanteos, tomemos el siguiente ejemplo, construido sobre el modelo de Holt:

	Par	*Impar*
Número de aciertos	FIE	PIE
	RIE	SON
	SOL	RAS

Las seis palabras corresponden a pruebas de un mismo jugador, y si conociéramos la palabra objetivo veríamos que comparándola con la lista de número de aciertos par, cada palabra de esta lista tiene un número par de letras (posiblemente, cero) iguales y en igual posición que la palabra buscada; mientras que en la lista impar sucedería así en número impar de lugares. Descubra la palabra objetivo.

4. El triple anillo

El siguiente problema apareció en Problematical Recreations nº 7, cuaderno de rompecabezas y pasatiempos que anualmente publica *Litton Industries*, de Beverly Hills, California. Un hombre que está tomándose una cerveza en la barra de un bar coloca tres veces su vaso sobre el mostrador, dibujando así los tres círculos que podemos ver en la Figura 79.

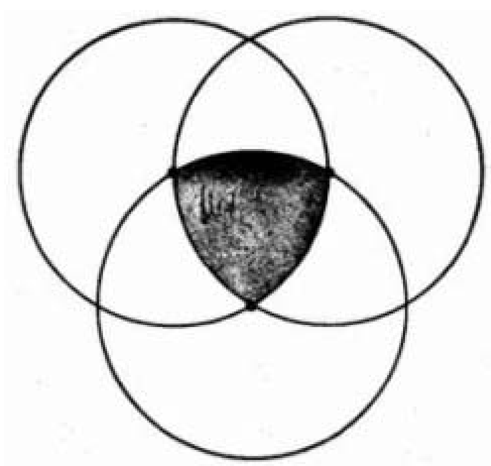

Figura 79. ¿Cuánto mide la porción sombreada de círculo?

Al hacerlo presta atención a que cada círculo pase por el centro de los otros dos. El encargado del bar opina que la zona de superposición de los tres círculos (sombreada en la figura) ocupa menos de la cuarta parte del área de un círculo. En cambio, el cliente cree saber que esta superficie es más de un cuarto de círculo.

El problema puede resolverse por las malas, hallando el área del triángulo equilátero inscrito en la región sombreada y sumándole luego las áreas de los tres segmentos circulares sobrantes por cada lado del triángulo. Pero un lector de mi sección, Tad Dunne, me envió una preciosa solución gráfica, donde la respuesta «salta a la vista», y que no requiere fórmulas geométricas ni apenas nada de aritmética, aunque sí un motivo decorativo reiterado. ¿Podrá redescubrirlo el lector?

5. Un calendario con dos cubos

En un escaparate de la *Grand Central Terminal* de Nueva York vi un insólito calendario de sobremesa (Figura 80).

Figura 80. ¿Con qué cifra están marcadas las caras no visibles de estos cubos?

Para señalar el día se colocan los cubos de manera que sus caras frontales den la fecha. En cada cubo, cada una de las caras porta un número de 0 a 9, distribuidos con tanto acierto, que siempre podemos construir las fechas 01, 02, 03... 31, disponiéndolos adecuadamente. No debería costarle demasiado al lector descubrir los cuatro dígitos no visibles en el cubo de la izquierda, y los tres ocultos en el situado a la derecha, aunque la verdad es que tiene un poco más de miga de lo que parece.

6. A salto de caballo, y sin cruces

En el *Journal of Recreational Mathematics* de julio de 1968, L. D. Yarbrough presenta una nueva variante del clásico problema de recorrer a salto de caballo los escaques de un damero. Además de la regla que prohíbe al caballo visitar dos veces una misma casilla (excepto en la jugada final, donde a veces se permite al caballo retornar al punto de partida) se impone ahora la regla de que la trayectoria del caballo no debe cortarse a sí misma. (Por trayectoria se entiende una línea quebrada que va conectando los centros de las casillas inicial y final de cada salto.) Se plantea una cuestión natural: ¿cuáles son las trayectorias sin cruces de longitud máxima que pueden trazarse en dameros de distintos tamaños?

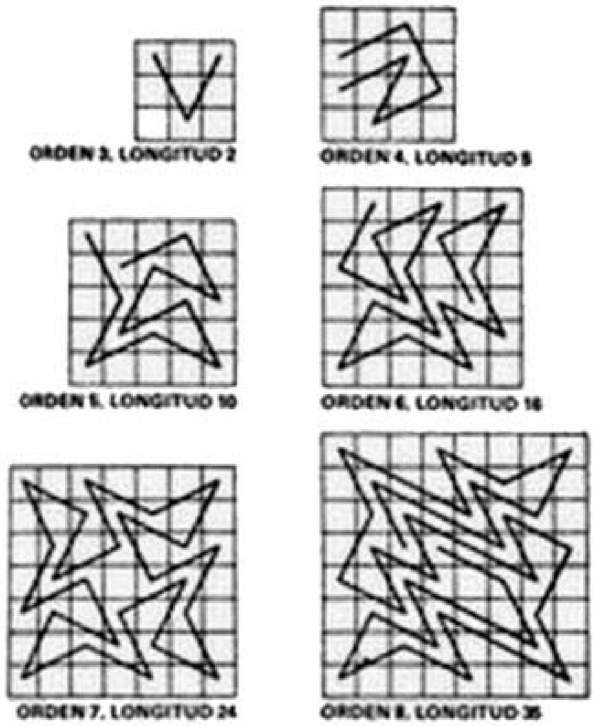

Figura 81. Hallar otro recorrido más largo en el tablero de orden 6

En la Figura 81 se reproducen algunas muestras de trayectorias sin cruces que Yarbrough ha descubierto para cuadrados de órdenes 3 a 8. El tablero de orden 7 presenta particular interés. Pocas veces los caminos de longitud máxima son cerrados, pero éste es una rara excepción, pues presenta además cuádruple simetría de rotación.

La búsqueda de recorridos máximos, sin cruces, a salto de caballo, atrajo la atención de Donald E. Knuth, quien preparó un programa de ordenador con el cual determinó, entre otras cosas, todos los recorridos sin cruces y de longitud máxima en tableros cuadrados de orden menor o igual que 8. Como es habitual, las trayectorias congruentes (es decir, que podrían quedar superpuestas por medio de giros o simetrías) se consideran idénticas, El ordenador descubrió dos recorridos máximos en el tablero de orden 3, cinco en el de orden 4, cuatro para el de orden 5, uno en el de orden 6, catorce en el de orden 7, y cuatro en el de orden 8, que es el ordinario de ajedrez.

Llama mucho la atención la unicidad de la solución en el tablero de orden 6, tablero que nos plantea además un problema, pues tan sólo aquí se equivocó Yarbrough al buscar recorridos de longitud máxima. Su recorrido tiene 16 movimientos, pero en este tablero es posible otro de 17, sin cruces por supuesto. Se invita al lector a igualar con su ingenio la fuerza bruta del ordenador, y que intente descubrir la única trayectoria de 17 pasos.

7. Dos problemas de urnas

En teoría de probabilidades es frecuente ilustrar los teoremas con ejemplos sobre objetos idénticos, aunque de distinto color, que son extraídos de urnas, cajas, bolsas, etc. Incluso los más sencillos de estos problemas pueden resultar difíciles de analizar claramente.

Recordemos, por ejemplo, el quinto de los *Pillow Problems* de Lewis Carroll. «Una bola contenida en una bolsa puede ser o bien blanca, o bien negra. Se añade a la bolsa una bola blanca, se agita la bolsa, y se extrae al azar una bola, que resulta blanca. ¿Qué probabilidad hay ahora de que al extraer la otra bola, también ésta resulte ser blanca?»

«A primera vista», nos dice Carroll en su análisis de la solución, «podría parecer que como el estado de la bolsa después de efectuadas estas operaciones tiene que ser necesariamente idéntico al que tuviera antes de introducir la bola blanca, la probabilidad sería ahora idéntica a la probabilidad inicial, es decir, 1/2. Pero ésto es un error».

Carroll demuestra entonces que la probabilidad de que la bola aún contenida en la bolsa sea blanca es 2/3 en realidad. Su demostración toma vuelos demasiado altos para exponerlos aquí, pero un lector de Chicago, Howard Ellis, ha enviado otra más sencilla. Denotemos $B(1)$ y N a la bola, bien blanca, bien negra, que pudiera encontrarse inicialmente en la bolsa, y sea $B(2)$ la bola blanca añadida a ella. Tras sacar una bola blanca hay tres estados igualmente probables:

Dentro de la bolsa	***Fuera de la bolsa***
$B(1)$	$B(2)$
$B(2)$	$B(1)$
N	$B(2)$

En dos de estos tres estados queda dentro de la bolsa una bola blanca, por lo que la probabilidad de que la segunda extracción sea también de bola blanca es de 2/3.

En un reciente problema de esta misma clase, cuya solución es todavía más inesperada, se comienza con una bolsa que contiene cierto número, desconocido, de bolas blancas, y un número igualmente indeterminado de bolas negras. (Hay al menos una de cada color.) Se van extrayendo las bolas por el siguiente procedimiento. Se toma primero una al azar, se anota su color, y se desecha. Se saca una segunda bola. Si es del mismo color que la primera, se desecha también. Se extrae una tercera. Sí es del mismo color que las anteriores, se desecha. Proseguimos de esta forma, desechando las bolas extraídas mientras sean del color de la primera.

Cuando se extrae una bola de distinto color que la primera, se la devuelve a la bolsa, ésta se agita, y se vuelve a empezar el proceso.

Para dejarlo tan claro como el agua, he aquí una muestra de cómo podrían desarrollarse las diez primeras extracciones:

1. La primera bola es negra. Desecharla.
2. La siguiente es negra. Desecharla.
3. La siguiente es blanca. Devolverla a la bolsa y recomenzar.
4. La primera es negra. Desecharla.
5. La siguiente es blanca. Devolverla a su lugar, y recomenzar.
6. La primera bola es blanca. Desecharla.
7. La siguiente es blanca. Desecharla.
8. La siguiente es negra. Devolver a la bolsa y recomenzar.
9. La primera bola es negra. Desecharla.
10. La siguiente es blanca. Devolver a la bolsa y recomenzar.

Sorprendentemente, resulta que, sea cual fuere la proporción inicial de bolas blancas y negras, la probabilidad de que la última bola que quede en la bolsa sea negra es siempre la misma. ¿Qué valor tiene esta probabilidad?

8. Nueve a bote pronto

1. Disponiendo de un reloj de arena de 7 minutos, y de otro de 11 minutos, ¿cuál es el método más rápido para controlar la cocción de un huevo, que debe durar 15 minutos? (Debido a Karl Fulves).
2. Un viajante recorrió en coche 5.000 km, permutando regularmente las ruedas (incluida la de repuesto) para que todas sufrieran igual desgaste. Al terminar el viaje, ¿durante cuántos kilómetros ha sido utilizada cada rueda?
3. Una baraja francesa de 52 naipes es mezclada concienzudamente, cortada, y vuelta a apilar. Se extrae la carta superior del mazo, y se observa su color (rojo o negro). La carta se devuelve a su lugar, el mazo de naipes vuelve a ser cortado, y vuelve a observarse el color de la carta situada en lo alto. ¿Cuál es la probabilidad de que ambos naipes sean del mismo color?
4. Hallar una base de numeración distinta de 10 en la que 121 sea cuadrado perfecto.

5. Construir ocho triángulos equiláteros trazando seis segmentos igual de largos.
6. Suponiendo que los ángulos no pueden ser trisecados mediante regla y compás, demostrar que ningún número de la progresión geométrica 2, 4, 8, 16, 32... puede ser múltiplo de 3. (Debido a Robert A. Weeks.)
7. Un granjero tiene 20 cerdos, 40 vacas, 60 caballos. Pero si llamamos caballos a las vacas, ¿cuántos caballos tendrá? (Debido a T. H. O'Beirne.)
8. Un griego nació el séptimo día del año 40 a. de C., y murió el séptimo día del 40 d. de C. ¿Cuántos años vivió?
9. Hay mujeres que contestan a todo con la verdad, otras que siempre mienten, y otras que alternan la verdad con la mentira. ¿Cómo se podría averiguar, con sólo dos preguntas cuya respuesta sea si o no, si una mujer es sincera a ultranza, mentirosa sin remedio, o si da una de cal y otra de arena?

Soluciones

1. Cuando un número par de personas toma asientos equidistantes frente a una mesa circular donde está indicada la posición que cada uno de ellos debe ocupar, siempre es posible hacer girar la mesa de forma que al menos dos de ellas queden situadas correctamente. Debemos distinguir dos casos iniciales.

a) Nadie está sentado en su lugar. La demostración es sencilla, y se basa en el llamado «principio de encasillamiento», a saber, que si se reparten n objetos en n - 1 casillas, al menos una casilla quedará ocupada por más de un objeto. Si a la mesa se acomodan 24 personas, todas ellas fuera de lugar, es evidente que girando la mesa podremos ir haciendo que cada una de ellas quede situada frente a su tarjeta. Ahora bien, la mesa solo puede tener 23 posiciones distintas de la inicial, y como hay 24 personas, en alguna de éstas 23 posiciones habrá dos (cuando menos) situadas correctamente. La demostración es válida tanto si el número de asientos es par como si es impar.

b) Una de las personas se encuentra en su sitio. La tarea consiste en demostrar que podemos girar la mesa y conseguir que al menos dos personas se encuentren correctamente colocadas. Hay demostraciones breves, pero estas demostraciones son de carácter técnico y requieren además notaciones especiales. La que daremos aquí, aunque más larga, es fácil de comprender, y es refundición de más de una docena de razonamientos parecidos enviados por los lectores.

Nuestra estrategia se basa en razonar por *reductio ad absurdum*. Supondremos primero que no es posible girar la mesa de forma que dos personas queden en sus lugares correctos, y mostraremos luego que esta hipótesis conduce a contradicción.

Si la hipótesis fuese correcta, en ninguna posición de la mesa podrían estar mal colocadas todas las personas, porque entonces estaríamos en el caso ya discutido antes, resuelto por el principio de encasillamiento. La mesa tiene 24 posiciones, y hay 24 personas; por consiguiente, en cada una de las posiciones de la mesa hay exactamente una persona correctamente situada.

Supongamos que sea Anderson. A cada uno de los demás podemos asignarle un número de «desplazamiento», que exprese cuántos lugares hay desde su asiento correcto hasta él, contando en sentido horario. Habrá una persona desplazada un asiento, otra dos, otra tres, y así sucesivamente, hasta una desplazada 23 asientos. No puede haber dos personas con números de desplazamiento iguales, porque en tal caso, girando la mesa adecuadamente ambas quedarían frente a sus tarjetas, posibilidad descartada por hipótesis.

Fijémonos en Smith, que está mal situado. Vamos contando sillas en sentido antihorario a partir de él hasta llegar al lugar situado frente a la tarjeta de Smith. La cuenta da, evidentemente, el número de desplazamiento de Smith. Fijémonos ahora en Jones, sentado donde debería estarlo Smith. Seguimos contando en sentido antihorario hasta llegar a la tarjeta de Jones. Como antes, la nueva cuenta es el número de desplazamiento de Jones. Sentado frente a la tarjeta de Jones está Robinson. Contamos en sentido antihorario hasta la tarjeta de Robinson, y así sucesivamente. Llegará un momento en que la cuenta termine en Smith. En efecto, si Smith y Jones se encontrasen uno en el asiento de otro y recíprocamente, habríamos regresado a Smith tras un cielo de dos personas, que nos habría hecho dar exactamente una vuelta a la mesa. Si Smith, Jones y Robinson estuvieran ocupando unos los asientos de otros, retornaríamos a Smith tras un ciclo de tres cuentas. El ciclo puede hacer intervenir un número cualquiera de personas, de 2 a 23 (no puede pasar también por Anderson, por estar éste correctamente situado), pero al cabo el recuento retornará a su punto de comienzo, tras dar un número entero de vueltas a la mesa. Por tanto, la suma de todos los números de desplazamiento del ciclo deberá ser igual a 0 módulo 24, es decir, la suma deberá ser múltiplo entero de 24.

Si el ciclo que arranca de Smith no hiciera intervenir a todas las personas incorrectamente situadas, se elige otra persona que no esté ocupando su asiento y se repite el mismo procedimiento anterior. Al igual que antes, el recuento deberá terminar en el punto de donde partió, tras cierto número entero de vueltas en torno a la mesa. Por consiguiente, también la suma de desplazamientos de este ciclo será múltiplo de 24. Efectuando tantos ciclos como sea necesario, llegará un momento en que habremos contado los desplazamientos de todos los asistentes. Y puesto que la cuenta de cada ciclo es múltiplo de 24, la suma de cuentas de todos los ciclos será también múltiplo de 24. O sea, hemos demostrado que la suma de todos los números de desplazamiento es necesariamente múltiplo de 24.

Buscaremos ahora la contradicción. Los desplazamientos son 0, 1, 2, 3... 23. La suma de esta sucesión es de 276, que no es múltiplo de 24. Esta contradicción nos obliga a abandonar nuestra hipótesis inicial, es decir, a admitir que al menos dos personas tienen el mismo número de desplazamiento.

La demostración anterior puede generalizarse a mesas cualesquiera con número par de asientos. La suma de $0 + 1 + 2 + 3 + ... + n$ es

$$n\,(n + 1)/2$$

que solamente es múltiplo de n cuando n es impar. Por consiguiente, para valores impares de n la demostración anterior falla.

George Rybicki resolvió el problema general de la siguiente forma. Comenzamos suponiendo lo contrario de lo que deseamos demostrar, a saber, que es posible situar las personas en la mesa de forma que nunca se consiga que dos queden correctamente situadas, cualquiera que sea la forma en que se haga girar la mesa. Sea n el número de personas, y sustituyamos sus nombres por los enteros 0 a $n - 1$, de «tal forma que al ir dando la vuelta a la mesa las tarjetas que reservan su plaza queden correlativamente numeradas. Si el delegado de número d se sentaba inicialmente frente a una tarjeta ahora marcada p, para que quede correctamente situado habrá que girar la mesa r lugares, siendo $r = p - d$, salvo si este número es negativo, en cuyo caso $r = p - d + n$. La colección de valores de d (y de p) correspondientes a los delegados es, desde luego, la sucesión de enteros de 0 a $n - 1$; y lo mismo sucede con la colección de valores de r, pues de lo contrario habría dos personas correctamente situadas al mismo tiempo. Sumando las igualdades anteriores, una por delegado, resulta $S = S - S + nk$, donde k es un número entero (posiblemente igual a 0 o negativo), y donde $S = n(n - 1)/2$. Despejando n de esta ecuación resulta que $n = 2k + 1$, el número de asistentes es impar».

Rybicki añade: «En realidad, resolví este problema hace algunos años, en relación con otro problema distinto en apariencia, pero totalmente equivalente, el de situar ocho reinas de ajedrez sobre un tablero cilíndrico sin que se ataquen, donde sólo se permite amenazar oblicuamente según una de las dos inclinaciones. Demostré entonces que el problema es insoluble en tableros de orden par; el razonamiento recién expuesto resulta de traducir, adaptándola a la mesa de conferencias, aquella demostración. Incidentalmente, esta demostración se simplifica un poco si se permite manejar congruencias módulo n.»

También Donald E. Knuth ha hecho notar la equivalencia de los problemas de la mesa giratoria y de las reinas no mutuamente amenazadas, y cita una solución de hace ya tiempo, debida a Georg Pólya. Varios lectores me han hecho ver, asimismo, que cuando el número de personas es impar hay una forma sencilla de colocarlas a la mesa, que hace imposible situar correctamente a más de una, se gire la mesa como se quiera. Consiste en sentarlas en orden contrario al orden señalado en sus tarjetas.

2. ¿Cómo pueden arreglárselas las blancas para ganar una partida de «mate al primer jaque» moviendo solamente los caballos, y en no más de cinco jugadas?

La apertura tiene que ser forzosamente C (caballo) 3AD. Como de esta forma se amenaza con dar jaque en dos jugadas más (por distintos caminos), las negras se ven forzadas a avanzar un peón que conceda así movilidad al rey. Si avanzan el peón de dama, la jugada blanca C5C obliga al rey negro a R2D. Pero entonces, al jugar las blancas C3AR, conseguirán dar jaque en la cuarta jugada con uno de los dos caballos. Si las negras abren un peón de alfil-rey, C5C permite dar jaque en la jugada tercera. Por consiguiente, las negras deben adelantar su peón de rey. Si avanzase dos escaques, al jugar las blancas C5D el rey negro queda inmovilizado, y las blancas ganan en la tercera jugada. Así. pues, parece que la única buena jugada de las negras es P3R.

La segunda jugada de las blancas será entonces C4R. El rey negro queda así obligado a jugar R2R. La tercera jugada de las blancas, C3AR, puede ser afrontada de muchas maneras, pero ninguna es capaz de impedir la victoria blanca lo más tarde en su quinta jugada. Si las negras intentan jugadas como P3D, P3AR, D1R, P4D, P4AD o C3AR, las blancas responden jugando C4D, y ganan en la siguiente jugada. Si las negras ensayan P4R, P4AD, o C3AD, el próximo paso de las blancas es C4TR, que le da la victoria en la siguiente.

En 1969, William H. Mills descubrió que las blancas podían también dar jaque en cinco abriendo C3TD. Las negras tienen entonces que avanzar su peón de rey uno o dos cuadros. Entonces, C5C obliga al rey negro a jugar R2R. La tercera jugada blanca, P4R va seguida de D3A o D5T, según jueguen las negras en su tercer movimiento, y permite dar jaque en la quinta jugada.

Desde aquella fecha han sido descubiertas otras dos aperturas que permiten dar jaque en cinco, debidas a Mills y a Georg Soules. Son, respectivamente, P3R y P4R. Para casi todas las respuestas de las negras, jugando D4C se consigue dar jaque en tres. Si la segunda jugada negra fuese C3TR o P4TR, jugando D3A se logra dar jaque en cuatro. Si la segunda jugada negra fuese P3R, las blancas jugarían D5T. Las negras tienen que responder P3CR. Pero entonces D5R liquida la cuestión. (De jugar las negras D2R, se contestaría con D x PAD; A2R se contesta con D7C; C2R, por D6A.) Si la segunda jugada de las negras es C3AR, al jugar las blancas C3TD el rey negro queda obligado a adelantar su peón de rey uno o dos escaques, y entonces C5C obliga a las negras a avanzar su rey, y D3A permite dar jaque a la siguiente.

David Silverman ha propuesto todavía otra forma de lograr que el ajedrez de jaque único conserve interés como juego. El ganador sería el primero capaz de dar jaque con una pieza que no pueda ser inmediatamente tomada por el contrario. Que yo tenga noticia, no se sabe de ninguna estrategia que pueda dar sistemáticamente la victoria a uno de los jugadores.

3. Para determinar la palabra objetivo marcaremos las seis palabras de prueba como sigue:

Par		Impar	
$P1$	FIE	$I1$	PIE
$P2$	RIE	$I2$	SON
$P3$	SOL	$I3$	RAS

La primera letra del objetivo no puede ser ni F ni R, pues de ser una de ellas $P1$ y $P2$ tendrían distinta paridad. Por otra parte, de $P1$ e $I1$ resulta que la primera letra del objetivo es F o es P, y como no puede ser F, necesariamente es P.

Como la primera letra de la palabra buscada es P, las palabras $P1$ y $P2$ deben contener 0 aciertos, e $I1$, contener 1. En efecto, de tener 2 aciertos en $P1$ y $P2$, $I1$ tendría 3, e $I2$ e $I3$ no tendrían ninguno, contrariamente a lo afirmado. Por consiguiente $I2$ e $I3$ tienen un acierto cada una. Además, $P3$ no puede tener dos aciertos, porque entonces $I3$ no tendría ninguno. Por consiguiente, el grupo SO de $I2$ es erróneo, y la N final, correcta. Ya es fácil deducir que la palabra objetivo es PAN.

4. Con tres circunferencias secantes, cada una de ellas pasando por el centro de las otras dos, podemos construir por repetición el motivo decorativo que vemos en la Figura 82.

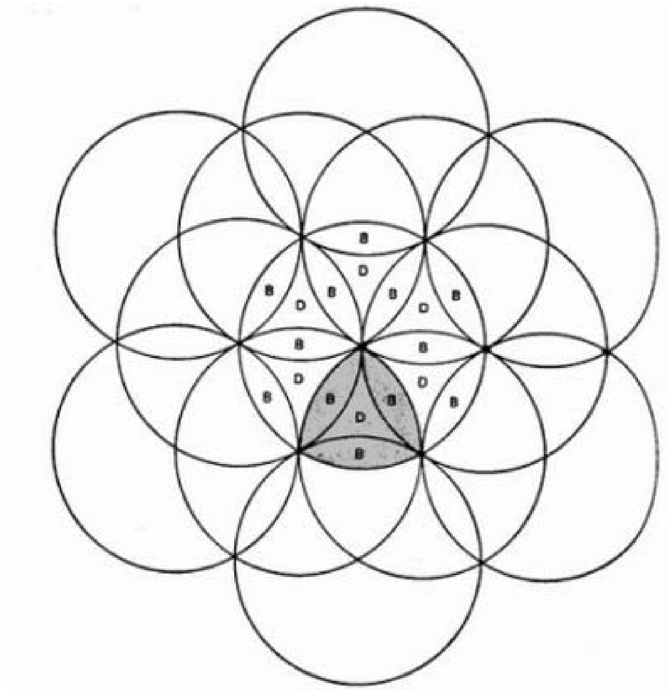

Figura 82. Solución al problema de los círculos secantes

Cada circunferencia puede descomponerse en seis piezas en forma de delta (D) y 12 «bananas» (B). La superficie común a tres círculos mutuamente superpuestos (sombreada en la ilustración) está formada por tres bananas y una delta, y por consiguiente, es inferior a la cuarta parte de un círculo, de la que difiere en media delta. Calculando la zona de mutuo recubrimiento vemos que es algo más del 22 por 100 de la superficie del círculo.

5. Cada cubo debe portar un 0, un 1, y un 2. De esta suerte quedan solamente seis caras en total para dar cabida a las siete cifras restantes. Afortunadamente, podemos ahorrarnos una cara usando un mismo signo para el 6 y el 9, y volteando adecuadamente el cubo. En la figura, el cubo de la derecha exhibe las cifras 3, 4, 5, y por consiguiente, en sus caras ocultas debe portar 0, 1 y 2. En el cubo de la izquierda podemos ver 1 y 2, así que sus caras no visibles deben ser 0, 6 (ó 9), 7 y 8.

John S. Singleton me escribió desde Inglaterra, indicándome que había patentado el calendario de dos dados en 1957/8 (Patente británica nº 831.572), pero que dejó de renovar la patente en 1965. Puede verse una variante del problema, donde con tres cubos basta para dar las iniciales de todos los meses del año, en la sección de Juegos Matemáticos de INVESTIGACION Y CIENCIA de marzo de 1978.

6. La Figura 83 muestra el único recorrido de caballo que no se corta a sí mismo y que es de longitud máxima entre los que poseen esta propiedad, para un tablero de orden 6.

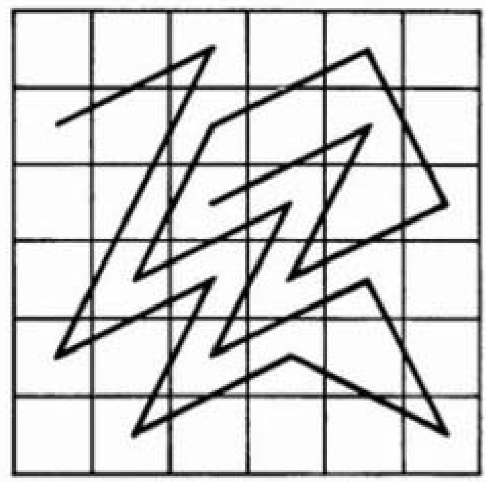

Figura 83. Recorrido del caballo de longitud máxima en tableros de orden 6

Podemos ver recorridos semejantes en tableros cuadrados de dimensión mayor, y en tableros rectangulares, en el *Journal of Recreational Mathematics*, vol. 2, julio de 1969, pp. 154-57.

7. El enunciado decía que extrayendo por cierto procedimiento bolas de una bolsa que las contiene blancas y negras en proporción desconocida, existía una probabilidad fija de que la última bola de la bolsa fuese negra. Si tal afirmación es cierta, ha de serlo por igual para cada color. Por consiguiente, la probabilidad buscada deberá ser 1/2.

Aunque este razonamiento resuelve el problema en la forma en que fue presentado, queda por establecer la tarea verdaderamente difícil, a saber, que la probabilidad es fija y no depende de la composición de la bolsa. Podemos demostrarlo por inducción, empezando con dos bolas, luego con tres, etc., o bien podemos buscar una demostración directa para el caso general. Desafortunadamente, ambos tipos de demostración son largos de exponer, por lo que me conformaré con invitar al lector a que consulte «A Sampling Process», de B. E. Oakley y R. L. Perry, en *The Mathematical Gazette* de febrero de 1965, pp. 42-44, donde dan una demostración directa.

Se podría concluir apresuradamente que la solución es generalizable, es decir, que si la bolsa contuviera una mezcla de *n* colores, la probabilidad de que la última bola fuese de un determinado color habría de 1/*n*. Pero no sucede así. Como ya hizo notar Perry en una carta, si hubiera dos bolas rojas, una blanca y una negra, la probabilidad de que la última sea roja, blanca o negra es, respectivamente, 26/72, 23/72 y 23/72.

8. Soluciones de los 9 problemas «a bote pronto»:

(1) Se ponen a contar los dos relojes de 7 y 11 minutos, al mismo tiempo que echamos el huevo en el agua hirviente. Cuando se termine la arena en el reloj de 7 minutos, le damos la

vuelta y esperamos a que se agote el de 11. Entonces le damos otra vez la vuelta al reloj de 7 minutos. Cuando se agote también la arena de éste habrán transcurrido 15 minutos.
Aunque la solución anterior es la que menos tiempo requiere, obliga a dar dos vueltas a uno de los relojes. La primera vez que propuse el problema pedí la solución «más sencilla», sin pararme a pensar más. Varias docenas de lectores me hicieron notar que hay otra solución más larga (que precisa de 22 minutos en total), pero más «sencilla» en el sentido de que sólo es necesario voltear una vez uno de los relojes. Se ponen ambos en marcha simultáneamente y, transcurridos los primeros 7 minutos se inicia la cocción del huevo. Cuando se agote la arena en el reloj de 11 minutos, le damos la vuelta. Al agotarse por segunda vez la arena de esta ampolleta habrán transcurrido 15 minutos de cocción.
Si le ha resultado entretenido este rompecabezas, he aquí otro un poco más difícil, del mismo tipo, tomado de Su*perior Mathematical Puzzles*, de Howard P. Dinesman (Londres, Allen and Unwin, 1968). ¿Cuál es el método más rápido para cronometrar 9 minutos, disponiendo de una ampolleta de 4 y otra de 7?
(2) Cada cubierta se utiliza 4/5 partes del tiempo total. Por consiguiente, cada una ha sufrido un desgaste de 4/5 de 5.000 km, es decir, 4.000 km.
(3) Cualquiera que sea el color de la primera carta cortada, esta carta no puede ocupar lo alto del mazo producido tras el segundo corte. Con el segundo corte seleccionamos al azar una carta entre 51, de las que 25 son del mismo color que la primera. Por consiguiente, la probabilidad de que las dos cartas sean de colores iguales será 25/51, ligeramente inferior a 1/2.
(4) En todo sistema de numeración de base mayor que 2, el número 121 es cuadrado perfecto. Una demostración sencilla consiste en observar que con cualquiera de estas bases 11 por 11 da como producto 121. Craige Schensted ha demostrado que definiendo adecuadamente el concepto de «cuadrado perfecto», 121 sigue siendo un cuadrado incluso en sistemas de numeración con base negativa, fraccionaría, irracional o incluso compleja. «Aunque tal vez no quede agotada la enumeración de posibles bases, yo sí lo estoy, e imagino que usted también, así que lo dejaremos como está», termina escribiendo Schensted.
(5) La Figura 84 muestra la solución que yo le di a esta cuestión. A la derecha puede verse una segunda solución, descubierta por dos lectores de *Scientific American*.

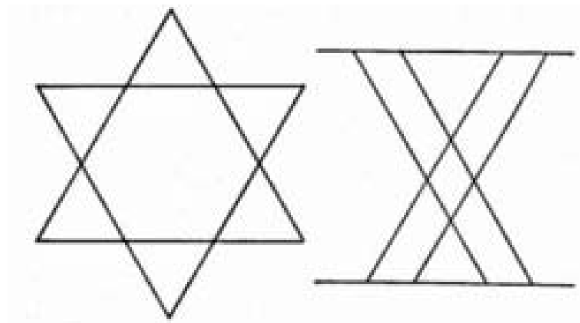

Figura 84. Con seis trazos rectos pueden hacerse ocho triángulos

(6) Todo ángulo puede ser bisecado con ayuda de regla y compás. Por bisección reiterada podemos dividir el ángulo en 4, 8, 16... partes iguales. Si alguno de los números de esta progresión fuese múltiplo de 3, resultaría posible dividir un ángulo en tres partes iguales por bisección reiterada, mediante regla y compás. Pero como se ha demostrado que ésto es imposible, ningún número de la progresión geométrica de razón 2 es exactamente divisible por 3.

(7) El granjero tendrá 60 caballos. Por mucho que nos empeñemos en decir que las vacas son caballos, no por eso nos van a hacer caso.

Resulta que este problema es variante de una broma debida a Abraham Lincoln. En cierta ocasión Lincoln le preguntó a un individuo que mantenía que la esclavitud no era esclavitud, sino una forma de protección, cuántas patas tendría un perro si dijésemos que su cola es una pata. La respuesta, dijo Lincoln, es cuatro, porque llamar patas a los rabos no los convierte en patas.

(8) El griego vivió 79 años. No hubo año 0.

(9) Hay que preguntarle dos veces a la mujer: ¿Eres una «alternadora»? Dos respuestas negativas demuestran que es sincera, dos respuestas afirmativas, que es mentirosa, y una respuesta afirmativa y otra negativa, en cualquier orden, que es de las que da una de cal y otra de arena.

Ya había sido publicada la solución anterior cuando varios lectores me enviaron la que sigue. Cito textualmente una carta de Joseph C. Crowther, Jr.:

Podemos descubrir la inclinación de la dama sin más que preguntar dos cuestiones de respuesta evidente, tales como, «¿Tiene usted dos orejas?» o «¿Es húmeda el agua?». La sincera contestará que sí las dos veces, y la mentirosa, las dos veces que no. Las «veletas» dirían una vez que sí y otra que no, y el orden de las respuestas permite determinar además en qué punto de la alternación se halla, hecho que podría ser útil en el decurso de la conversación.

Ralph Seifert Jr. envió una solución de sólo una pregunta, que atribuye a su amigo M. A. Zorn. «Si alguien le formulara dos veces la misma pregunta, ¿respondería usted falazmente "no" una vez y sólo una?» La sincera diría «no», la mentirosa, «sí» y las veletas quedarían tan irremediablemente confundidas que no sabrían qué contestar.