Capítulo 16
Curiosidades del sistema solar

Alrededor del ancestral sendero desfilaba,
fila tras fila, el ejército de la ley más
inmutable
George Meredith, Lucifer in Starlight

La Astronomía, como todas las demás ciencias, tiene curiosos recovecos donde podemos toparnos con problemas matemáticos de carácter recreativo. En este capítulo echaremos un vistazo al sistema solar, del que tantos y tan sorprendentes descubrimientos se están realizando ahora, y comentaremos algunas divertidas cuestiones matemáticas que se han suscitado a lo largo de la historia de las especulaciones acerca de la estructura de la familia de cuerpos que orbitan alrededor del Sol.

Para empezar, un poco de historia. Está muy extendida la errónea creencia de que todos los pueblos de la antigüedad pensaban que la Tierra era plana y centro del universo. Los pitagóricos griegos, por ejemplo, enseñaban que la Tierra es redonda, y que está dotada de movimiento de rotación. Según ellos, el centro del sistema solar no era el Sol, sino un fuego central muy brillante, que el Sol reflejaba, al igual que nuestra Luna (como ahora sabemos) «arrebata» su «pálido fuego» (la terminología es de Shakespeare) al Sol. La Tierra, la Luna, el Sol y los otros cinco planetas entonces conocidos daban vueltas en torno al fuego central. Como la Tierra mantenía siempre su mitad no habitada hacia este fuego durante su traslación en la órbita, que duraba 24 horas, tal fuego nunca podía ser visto. Aristóteles sugirió que el obsesivo culto que los pitagóricos prestaban al número 10 (número triangular que es también suma de 1, 2, 3 y 4) fue causa de que miembros de la escuela pitagórica añadieran un décimo cuerpo astral, llamado antichthon (contra-tierra), también invisible por recorrer una órbita intermedia yaciente entre la Tierra y el fuego central. Un astrónomo griego del siglo IV a. de C., Aristarco de Samos, llegó a proponer un auténtico sistema heliocéntrico, donde todos los planetas giraban alrededor del Sol, pero su tratado se ha perdido, y solamente se tienen referencias de él a través de comentarios de Arquímedes. Empero, el modelo que dominó la astronomía griega fue el modelo geocéntrico de Aristóteles: una Tierra esférica inmóvil, plantada en el centro del universo, alrededor de la cual giraban todos los demás cuerpos celestes, incluidas las estrellas. Aristóteles defendió y sostuvo un magnífico razonamiento anterior en favor de la redondez de la Tierra: durante los eclipses de Luna, la sombra de la Tierra sobre aquélla muestra un borde redondeado, perfectamente explicable si la Tierra fuese una bola. El sistema ptolernaico del siglo II d. de C., refinamiento del aristotélico fue inventado para dar cuenta de las erráticas trayectorias de los cinco planetas visibles directamente cuando cruzan nuestro firmamento. Para ello se hacía que los planetas recorrieran círculos menores, llamados epiciclos, al mismo tiempo que iban describiendo órbitas mayores en torno a la Tierra. El modelo era bastante adecuado para explicar los movimientos aparentes de los cuerpos celestes, incluidos los irregulares movimientos de los planetas y de la Luna derivados del carácter elíptico de sus trayectorias; bastaba con postular suficientes epiciclos y hacer que éstos fueran recorridos con velocidad no uniforme.

Todos sabemos hoy que, tras larga controversia, que culminó en el proceso de Galileo terminó por imponerse el modelo heliocéntrico de Nicolaus Copernicus. Se suele aducir que la victoria de la teoría copernicana se debió solamente a que era más sencilla que la ptolemaica. Thomas S. Kuhn ha ido más lejos, negando que el modelo copernicano fuese más sencillo o más ajustado a los datos observados. «...El verdadero atractivo de la astronomía heliocéntrica», escribe en *The Copernican Revolution*, «fue más estético que pragmático. Para los astrónomos, la elección inicial entre los sistemas de Copérnico y Ptolomeo sólo podría ser cuestión de gustos... »

Pero Kuhn está equivocado. Había muchas observaciones astronómicas, señaladas por el propio Copérnico, que tenían en su teoría explicación mucho más sencilla que en la ptolemaica; y esto confería a la teoría copernicana una autoridad que era mucho más que cuestión de «gusto». Y más adelante, la teoría copernicana explicó además gran variedad de fenómenos astronómicos, entre ellos el abultamiento ecuatorial terrestre, para los que la teoría ptolemaica no podía dar razón. (Sobre lo anterior puede verse «Kuhn and the Copernican Revolution», por Richard J. Hall, en el *British Journal for the Philosophy of Science*, mayo de 1970, pp. 196-97.)

La última peripecia de esta vacilante historia llegó con la teoría general de la relatividad, de Einstein. Si esta teoría es correcta, no existen movimientos absolutos con respecto a un espacio fijo y, por consiguiente, no hay «sistemas de referencia privilegiados». Podemos suponer, si lo queremos, que la Tierra está fija, ni siquiera en rotación, y las ecuaciones tensoriales de la relatividad se encargarán de todo. Si la Tierra ha engordado por la cintura, ello no se debe a las fuerzas de inercia, sino a que el Cosmos en rotación alrededor de ella produce un campo gravitatorio responsable del abultamiento ecuatorial. Como todo movimiento es relativo, preferir para el sistema solar un modelo geocéntrico o heliocéntrico no pasa de ser cuestión de conveniencia. Decimos que la Tierra gira alrededor de un eje porque es enormemente más sencillo suponer que el cosmos es un sistema de referencia inercial, que decir que está girando y desplazándose de formas complejas respecto a nosotros. No se trata de que la teoría heliocéntrica sea «más verdadera». En realidad, el propio Sol se mueve respecto de las estrellas, y carece de sentido decir de él que es centro del cosmos. El único movimiento «verdadero» es el movimiento relativo de la Tierra y el resto del universo.

Esta arbitrariedad en la elección del sistema de referencia interviene en un divertido problema que de cuando en cuando surge todavía en conversaciones de café. La Luna da vueltas en torno a la Tierra de la misma forma que la Tierra giraba en torno al fuego central del sistema pitagórico, es decir, mostrando siempre la misma cara hacia la Tierra. Este hecho ha intrigado por igual a astrónomos y poetas, grandes o pequeños. En «One Word More», Robert Browning compara las dos caras de la Luna a las «dos caras del alma» de los hombres: « ¡una, con la que enfrentarse al mundo; la otra para mostrarla a una mujer cuando él la ama!». Y Edmund Gosse atribuyó a su criado su «inmortal» cuarteto:

¡Oh Luna al contemplar luminosa
tu faz, por el cosmos presurosa,
muchas veces fue mi sentir primero
si admirar podré algún día tu trasero!

El púdico hábito lunar de ocultarnos su reverso suscita la siguiente cuestión trivial: ¿gira la Luna sobre sí misma al tiempo que lo hace alrededor de la Tierra? Los astrónomos nos dirían que sí, una vez en cada revolución. Aunque cueste creerlo, tan soliviantados por esta opinión han quedado algunos hombres de reconocida inteligencia, que han llegado a publicar (por lo común, a sus expensas) largas monografías explicando que la Luna de ninguna manera puede decirse que gire sobre sí misma. (En *Budget of Paradoxes*, de Augustus de Morgan, se comentan algunos de estos tratados.) Incluso el gran Johannes Kepler prefirió pensar que la Luna no tenía movimiento de rotación, y la comparaba a una bola atada a una correa, volteada por encima de la cabeza. El Sol gira, argüía Kepler, para impartir a sus planetas el movimiento de traslación, y la Tierra gira sobre si misma para inducir el movimiento de su luna. Pero como la Luna ya no tiene lunas propias más pequeñas, no tiene tampoco necesidad de rotar sobre sí misma.

El problema de la rotación de la Luna es fundamentalmente idéntico al de la paradoja de las monedas, explicada en el Capítulo 2 de mi *Carnaval matemático*. Si se hace rodar una peseta sobre el contorno de otra peseta fija, manteniendo apretados sus cantos para que no haya deslizamiento, la moneda «ruleta» da dos vueltas sobre sí misma al darle una vuelta completa a la otra.

Pero, ¿de veras es así? Joseph Wisnovski, redactor de *Scientific American*, me ha llamado la atención acerca de una furiosa controversia que, hace ahora un siglo, se desató en la sección de cartas de dicha revista durando casi tres años. En 1866, un lector preguntaba: «¿cuántas vueltas dará alrededor de su eje una rueda al rodar una vuelta completa sobre otra rueda fija de igual tamaño?». « Una», contestaron los redactores de la revista. La consecuencia fue una riada de cartas de lectores en desacuerdo. En el volumen 18 (1868), pp. 105-106, *Scientific American* publicó una selección de cartas tomadas de «entre más de una arroba», que mantenían el punto de vista de la doble rotación. Durante los tres meses siguientes la revista publicó correspondencia tanto de «unistas» como de «dualistas», incluyendo grabados de complejos dispositivos mecánicos que unos y otros habían construido para dilucidar definitivamente la cuestión. «Si volteásemos un gato por encima de nuestra cabeza», escribía el unista H. Bluffer el 21 de mayo de 1868, ¿girarían la cabeza, los ojos, y las vértebras del animal en torno a sus ejes respectivos? ¿Moriría el animal en la séptima vuelta? ...»

El volumen de correspondencia sobre el tema alcanzó proporciones tales, que en abril de 1868 los editores decidieron cerrar el debate en *Scientific American*, prosiguiéndolo en cambio en una nueva revista mensual, *The Wheel* [La Rueda] dedicada enteramente «a la gran cuestión». Al menos un número de esta publicación debió ver la luz, pues en su edición del 23 de mayo, *Scientific American* prevenía a sus lectores que podrían adquirirla en quioscos, o por correo, al precio de 25 centavos. Quizá toda la polémica fuese una tomadura de pelo de los editores. Evidentemente, todo el debate se reduce a cómo defina uno la frase «girar en torno a su eje». Para un observador situado en la moneda fija, la ruleta da tan sólo una vuelta. Para un observador exterior, que mire desde arriba las dos monedas, la ruleta da dos vueltas. La Luna no gira sobre sí misma con respecto a la Tierra, pero sí lo hace con relación a las estrellas. ¿Sabría explicar el lector, sin construir un modelo, cuántas veces girará alrededor de sí misma la moneda exterior suponiendo que su diámetro sea la mitad del diámetro de la moneda fija?

La misma cuestión trivial que se suscitó respecto a la rotación lunar pudo haberse planteado entre 1890 y 1965 con el planeta Mercurio. El astrónomo italiano Giovanni Schiaparelli (el mismo que, al dibujar mapas marcianos entrecruzados por una malla de arcos más o menos rectilíneos que había creído observar, dio pábulo a las más absurdas historias sobre canales de riego en el planeta rojo) anunció a finales de la década de 1880 que sus observaciones demostraban que Mercurio conservaba siempre la misma cara en dirección al Sol. O dicho de otra forma, que daba una vuelta sobre sí mismo en cada una de sus revoluciones en torno al Sol (que duran 88 días terrestres). Durante los 75 años siguientes, cientos de observaciones de astrónomos eminentes confirmaron este hecho. Debido a que Mercurio carece de atmósfera que transfiera calor, se supuso que su cara iluminada se encontraría perpetuamente hirviendo, a unos 350 ó 400 grados centígrados, mientras que su cara oscura estaría perennemente a temperatura cercana al cero absoluto. Nada menos que en 1962, Fred Hoyle escribía: «Mercurio tiene la distinción de poseer no sólo el lugar más cálido de todo el sistema planetario, sino también el más frío».

De acuerdo con esto. entre los lados frío y cálido de Mercurio debería sin duda existir un cinturón en perpetuo crepúsculo, de clima presumiblemente lo bastante suave como para soportar vida. Esta idea tuvo interesados desde hace mucho a los escritores de cienciaficción. «En crepúsculo. Aquí estamos siempre en crepúsculo», dice un visitante de Mercurio en un cuento de Arthur Jean Cox, The Twilight Planet (1951). «Los días pasan, o al menos así lo dicen los relojes y calendarios, pero el tiempo, el tiempo subjetivo, está delicadamente congelado en mitad de su vuelo. El valle es un océano de sombras; mareas de umbría lamen delicadamente las montañas, sus orillas». En «Sunrise on Mercury» (1957), de Robert Silverberg, los astronautas se posan en el «cinturón crepuscular» de Mercurio, situado entre «el reino gélido y limitado por hielos del más profundo pozo imaginado por Dante», y «el imperio del ardiente azufre». El cinturón es la zona donde se funden el fuego y la gelidez, siendo «cada hemisferio un infierno peculiar». Cuando el cuento fue reimpreso en 1969 formando parte de una antología publicada por Dell (First Step Outward), el recopilador, Robert Hoskins, tuvo que añadir una nota explicando que el cuento había salido ya del terreno de la ciencia ficción, para entrar en el de la pura fantasía.

La primera indicación de que algo no iba como es debido surgió en 1964, cuando las observaciones de radioastrónomos australianos mostraron que la cara supuestamente helada de Mercurio tiene una temperatura media de unos 15º C. ¿Será posible, se preguntaron todos, que Mercurio pueda poseer atmósfera? En 1965, Gordon H. Pettengill y Rolf B. Dyce, mediante ecos de radar procedentes de bordes opuestos del planeta, descubrieron la verdadera razón. Schiaparelli se había equivocado con respecto a la rotación de Mercurio, igual que antes sobre los canales marcianos. Mercurio da una vuelta alrededor de su eje cada 59 días, que son exactamente dos tercios de su periodo orbital. Al parecer, el planeta tiene una masa desequilibrada respecto a su eje de rotación, tal como le sucede a nuestra Luna, o bien se crean en él prominencias semejantes a mareas, que provocan que el planeta quede atrapado por el Sol en una especie de «ciclo de resonancia» de relación 3 : 2. Por cada dos órbitas, el planeta da tres vueltas en torno a su eje. Una de las causas que explican el error de los astrónomos es que éstos suelen observar Mercurio en un momento favorable que se presenta una vez al año. Como siempre veían las mismas marcas parduscas, presumían que, dado que Mercurio había dado cuatro órbitas desde la observación anterior, había dado también cuatro vueltas sobre sí mismo, cuando en realidad había dado seis. Aunque el error admita estas racionalizaciones y disculpas, como escribía Irwin I. Shapiro («Radio-Observations of the Planets», por Irwin I. Shapiro, Scientific American, julio de 1968), todavía hoy resulta «intranquilizador contemplar esta persistencia en el engaño de uno mismo». ¡Qué malicioso placer no hubiera experimentado Charles Fort, excéntrico iconoclasta de la ciencia, de haber sabido de tal fenomenal metedura de pata!

Todavía más sorprendente fue el descubrimiento sobre la rotación de Venus, en 1962. Se creía que Venus tenía un lentísimo movimiento de rotación, de periodo tan parecido a los 225 días de período de traslación, que muchos astrónomos, Schiaparellí entre ellos, estaban convencidos de que los períodos de traslación y rotación de la estrella vespertina son idénticos, como le sucede a nuestra Luna y, por lo que se creía entonces, a Mercurio.

En 1962, los radio-astrónornos establecieron con ayuda del radar Goldstone del Jet Propulsion Laboratory que Venus tiene una lenta rotación de sentido inverso al de los demás planetas. (El sentido de rotación de Urano es ambiguo, pues estando su eje casi paralelo a la eclíptica, cualquiera de sus polos puede ser tomado corno norte). Venus es el único planeta donde el sol levanta (y muy lentamente, por cierto) por el oeste. Además, su período de rotación es de 243,16 días, más largo que su año-, valor tan particular que cada vez que Venus ocupa la posición de máxima cercanía a la Tierra, presenta siempre hacia nosotros la misma cara. En Don Juan, Lord Byron nos habla de un «firmamento rosáceo, con una estrella [Venus] refulgiendo a su través, como un ojo». Por qué habría de tener Venus clavado su ojo en la Tierra de tan curiosa manera, sigue siendo un misterio. Presumiblemente le ocurra como a Mercurio, que su masa sea asimétrica, o bien tenga una prominencia o marea gravitatoria lo suficientemente grande como para quedar atrapado por la Tierra en un inesperado acoplamiento de resonancia.

Otra de las más sonadas imposturas de toda la historia de la astronomía fue la falsa luna de Venus. En 1645, un astrónomo italiano, Francesco Fontana, aseguró haber observado una luna en torno al planeta Venus. Su observación fue confirmada en 1672 por Jean Dominique Cassini, quien había descubierto ya dos satélites de Saturno y más adelante descubriría otros dos. Muchos renombrados astrónomos del siglo XVIII reseñaron también observaciones de la luna venusina. En 1773 el famoso físico, matemático y astrónomo Johann Heinrich Lambert publicó un tratado sobre la luna de Venus, donde llegaba incluso a calcular su órbita. Federico el Grande quiso condecorar a Jean Le Rond D'Alembert por haber éste bautizado la luna de Venus en su honor, si bien D'Alembert declinó cortésmente la distinción. Evidentemente tal luna no pudo haber existido jamás, pues habría sido visible como una pequeña mota oscura cuando Venus cruza por delante del disco solar. Lo que los astrónomos vieron fueron quizás estrellas cercanas o imágenes fantasmas producidas por refracción en las lentes, o como en el caso de los astrónomos que «observaron» los canales marcianos, sus deseos se impusieron a su sentido de la realidad. Parecida explicación deben tener sin duda las observaciones realizadas durante los siglos XVIII y XIX del planeta Vulcano, hipotéticamente situado en el interior de la órbita de Mercurio.

¿Cómo ha evolucionado el sistema solar? Nadie lo sabe con certeza. En la actualidad, la explicación más aceptada es esencialmente la primera de las modernas, propuesta por Inmanuel Kant. Los planetas serían condensaciones de gases y partículas de polvo que giraban en torno al Sol formando a modo de nube discoidal. Vista desde la estrella polar, esta nube giraría en sentido contrario a las agujas del reloj, lo que explicaría por qué todos los planetas giran en el mismo sentido alrededor del Sol. ¿Cuál es entonces la causa de que sus antiguos senderos celestiales estén separados como lo están? ¿Se trata de mera casualidad, u obedecen alguna ley matemática?

Fue Kepler quien inventó la explicación más fantástica. Intentó primero inscribir y circunscribir en las órbitas polígonos regulares y después esferas y cubos; pero no atinaba a dar una pauta que proporcionara las dimensiones correctas. De pronto le vino una inspiración. Hay seis planetas, y por tanto, cinco espacios intermedios entre ellos. ¿Y no es cierto que hay cinco y solamente cinco sólidos regulares convexos? Encajando uno dentro de otro los cinco sólidos platónicos en un cierto orden, con esferas intermedias encargadas de traducir las excentricidades de las órbitas elípticas de los planetas, obtuvo una estructura que se correspondía aproximadamente con las que entonces se creía eran las distancias máxima y mínima de los planetas al Sol (véase la Figura 85).

Se trataba de una teoría absurda, incluso en tiempos de Kepler. Pero Kepler era una compleja y curiosa combinación de intuición científica admirable y de creencias ocultistas (astrología incluida), que le hacían sentir la necesidad de armonías geométricas como éstas. «El intenso placer que he recibido de este descubrimiento», escribió, «nunca podrá ser expresado con palabras». Es irónico que sus convicciones más correctas, como que los planetas describen elipses en vez de círculos, o que las mareas son provocadas por la Luna, fueron consideradas no menos ridículas, siendo despreciadas incluso por Galileo, quien las consideró fruto de la fantasía de Kepler.

En 1772, Johann Daniel Titus de Wittenberg anunció el descubrimiento de una sucesión numérica sencilla que al parecer reflejaba bien las proporciones de las órbitas planetarias.

Esta sucesión fue pronto conocida como «ley de Bode», porque cuatro años más tarde, un astrónomo alemán de más renombre, Joham Elert Bode, la dio a conocer en un libro de texto. Para obtener los números se empieza por 0, 3, 6, 12, 24, 48, 96, 192... Cada uno de estos números es mitad del siguiente, excepto el 0, que debería ser 1 1/2. Ahora se le suman 4 a los números de la sucesión.

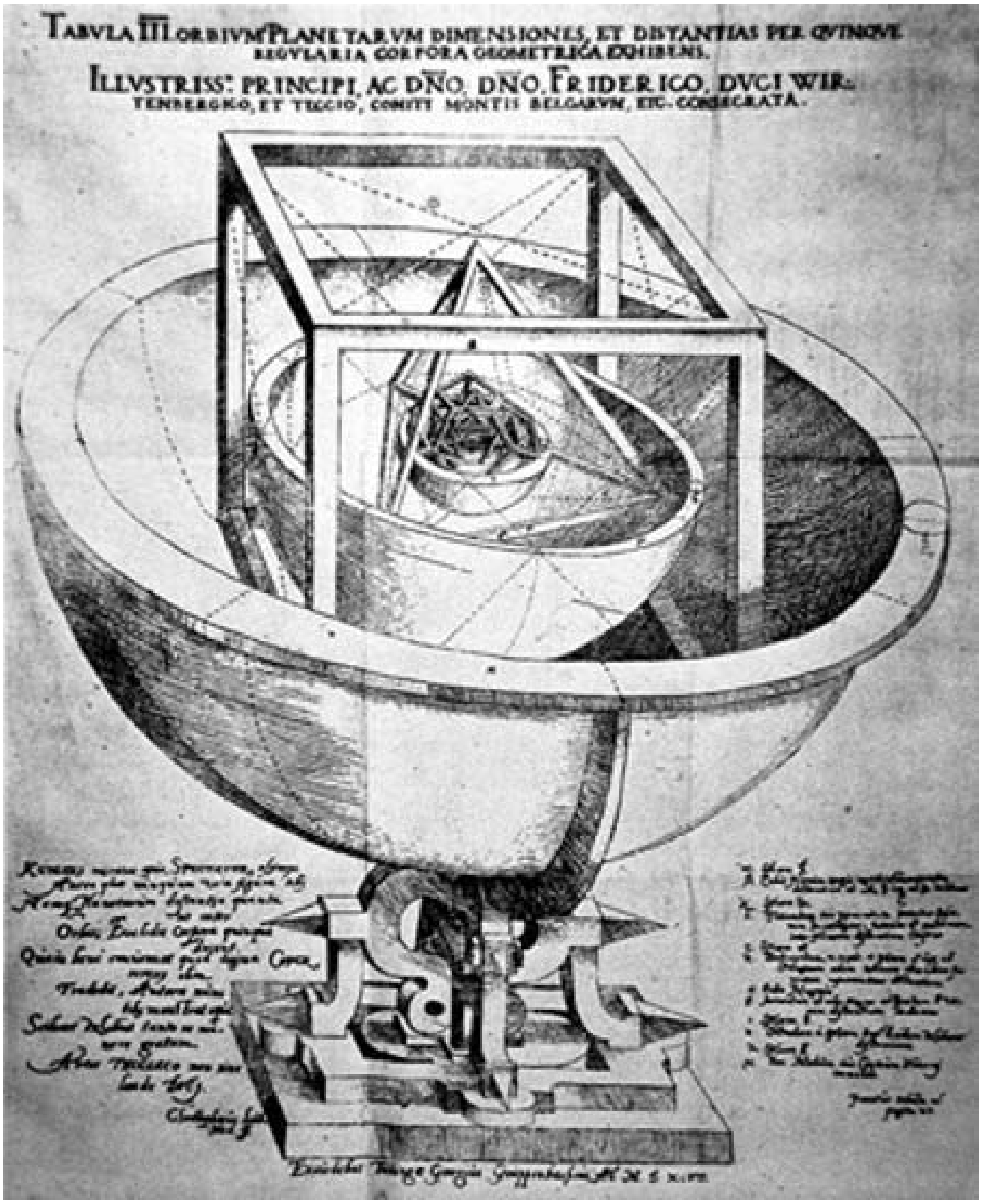

Figura 85. Modelo de Kepler del sistema solar.

La serie resultante, 4, 7, 10, 16, 28, 52, 100, 196..., da las razones de las distancias medias de los planetas al Sol. Tomando la distancia Tierra-Sol como «unidad astronómica», el tercer número, 10, se convierte en 1. Dividiendo por 10 los demás números se obtienen entonces las distancias medias de los planetas al Sol, expresadas en unidades astronómicas. La tabla de la Figura 86 muestra las distancias dadas por la ley junto a las distancias verdaderas. Observemos que las distancias medias de los seis primeros planetas, que eran los únicos todavía conocidos cuando Bode publicó su libro, coinciden sorprendentemente con los valores dados en la serie de Bode. Y no sólo eso, sino que la ley de Bode tuvo éxito en dos magníficas predicciones.

Planeta	*Serie de Bode*	*Distancia media verdadera*
MERCURIO	0,4	0,39
VENUS	0,7	0,72
TIERRA	1	1
MARTE	1,6	1,52
(CERES)	2,8	2,77
JUPITER	5,2	5,20
SATURNO	10	9,57
URANO	19,6	19,15
NEPTUNO	38,8	29,95
PLUTON	77,2	39,39

Figura 86. Ley de Bode sobre los tamaños relativos de las órbitas planetarias

La primera de ellas era que debería existir un planeta a 19,6 unidades astronómicas del Sol. Al ser descubierto Urano en 1781, se le apreció una distancia de 19,2 u.a., hecho que convenció a muchos astrónomos de la fiabilidad de la ley de Bode. La segunda predicción era que debería existir un planeta en el enorme vano situado entre las órbitas de Marte y Júpiter, a unas 2,8 u.a. del Sol. En 1801, y precisamente en el primer día del nuevo siglo, se descubrió el mayor de todos los asteroides, Ceres, a una distancia observada de 2,77 u.a. del Sol.

Más tarde se observaron en esta región miles de planetoides más pequeños; y los defensores de la ley de Bode arguyeron que estos planetoides eran los restos de un planeta que ocupaba una órbita cercana a la prevista por la ley, y que por causas desconocidas hizo explosión.

Lamentablemente, la ley fallaba para Neptuno y Plutón, lo que convenció a muchos astrónomos de que los anteriores éxitos de la serie de Bode debían haber sido casuales.

Otros astrónomos han sugerido recientemente que Plutón pudiera ser un satélite liberado de Neptuno, y que antes de que ambos astros se separasen, Neptuno debió ocupar una órbita cercana a la prevista por la ley. Se ha argumentado también que la ley de Bode pudiera ser válida para todos los planetas del sistema solar, excepto los situados en las zonas límite interior y exterior, donde sería más verosímil que se dieran irregularidades. Como las órbitas de Mercurio tienen excentricidades mucho mayores y están mucho más inclinadas con relación al plano de la eclíptica que las de los demás planetas, no es absurdo suponer que por sus condiciones límite fueran excepciones de la regla general.

¿Es la ley de Bode una curiosidad numerológica tan intrascendente como la sucesión de poliedros encajados de Kepler, o por el contrario es manifestación de algún hecho valioso que algún día quedará explicado en alguna teoría sobre el origen del sistema solar? La cuestión no está resuelta todavía. Los partidarios de la ley suelen aducir en su favor la sucesión numérica anunciada en 1885 por el matemático suizo Johann Jakob Balmer, que se ajustaba a las frecuencias de las líneas espectrales del hidrógeno. Esta serie era pura numerología hasta que varios decenios después Nieis Bohr descubrió en la mecánica cuántica explicación a la «serie de Balmer».

«El quid de la cuestión», escribe Irwin John Good en un reciente articulo que se menciona en la bibliografía del libro, «consiste en saber si una ley numerológica no. respaldada por modelo conceptual ninguno es lo suficientemente llamativa como para decidirnos a buscarle un modelo científico que la explique.» Desde mi puesto de espectador lego no me atrevo ni a conjeturar cómo será tratada la ley de Bode en los años venideros.

Para terminar, otro problema delicado y con algo de trampa. Conforme la Tierra recorre su órbita en torno al Sol , la Luna describe una trayectoria sinuosa con respecto al Sol. A lo largo de 12 órbitas lunares alrededor de la Tierra, ¿cuántas secciones de esa trayectoria sinuosa son cóncavas, en el sentido de que sus lados convexos apuntan hacia el Sol?

Soluciones

La solución del primer problema es que la moneda da tres vueltas sobre sí misma al dar una vuelta en torno a una rueda fija de diámetro doble, y sobre la cual rueda sin deslizar. Como el perímetro de la ruleta es mitad del perímetro de la circunferencia base, vista desde la circunferencia fija la ruleta da dos vueltas sobre sí misma, y la revolución en torno a ésta añade una tercera vuelta para un observador que las contemple desde arriba. La fórmula general, siendo *a* el diámetro de la rueda fija, y *b* el de la ruleta, es $(a/b) + 1$, y nos da el número de rotaciones en cada revolución. Por tanto, si la ruleta tiene diámetro doble de la circunferencia base, gira sobre sí misma 1 1/2 veces. Conforme la ruleta crece con respecto a la circunferencia base, el número de rotaciones por revolución tiende hacia el límite 1, límite que sólo se alcanzaría cuando la ruleta rodase en torno a una circunferencia «degenerada» de diámetro cero, es decir, de un punto. Supongamos que el diámetro de la moneda fija sea igual al perímetro de la moneda ruleta. ¿Cuántas veces gira sobre sí misma la moneda exterior en cada revolución?

La solución al número de segmentos cóncavos de la sinuosa trayectoria de la Luna en torno al Sol es que en ningún momento tal trayectoria es cóncava. La Luna está tan cercana a la Tierra, y la velocidad de la Tierra es tan grande es comparación con la velocidad de la Luna en torno a la Tierra, que la trayectoria de la Luna es, con respecto al Sol, convexa en todos sus puntos.