Capítulo 12
Dominós

Llama la atención lo poco que, según parece, se sabe acerca de los orígenes del dominó. En la literatura occidental no hay referencias a este juego hasta mediados del siglo XVIII, en que empezaron a jugarse en Italia y Francia las primeras partidas. Desde ahí, el juego se extendió al resto del continente, y más tarde, a Inglaterra y América. En Occidente, la colección normal de piezas de dominó ha consistido siempre en 28 teselas o losetas formadas por dos cuadrados adyacentes, que contienen todos los posibles pares de dígitos, de 0 hasta 6 (véase la Figura 58).

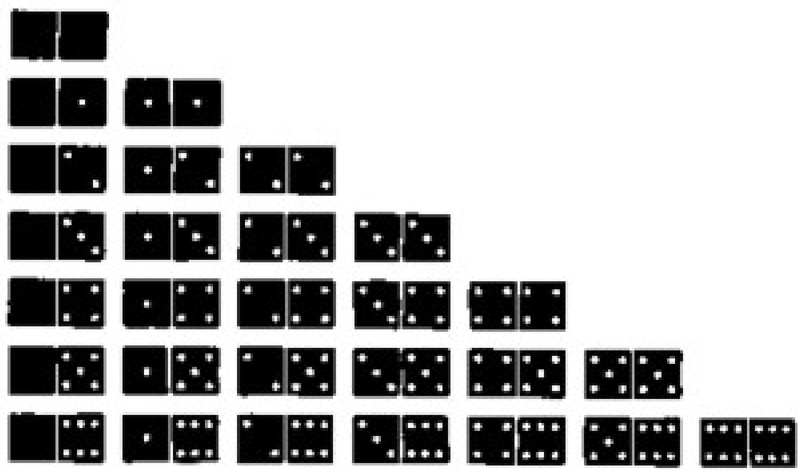

Figura 58. El juego de piezas de dominó habitual en Europa y América

Cada dígito aparece ocho veces en el juego. Se han construido juegos excepcionales, que contienen desde el «blanca doble», 0-0 (los dos cuadros en blanco) hasta el 9-9 (55 piezas en total) o hasta el 12-12 (91 piezas) con objeto de poder admitir número mayor de jugadores. Por lo común, las piezas son negras, con puntos blancos vaciados en sus caras, o blancas con puntos negros. El nombre quizá proceda de la semejanza del 1-1 con el antifaz negro que se usaba en los bailes de máscaras de la época.

Aún hoy se ignora si los dominós europeos fueron invención autóctona, o si fueron plagiados de los dominós chinos. Sea como fuere, el juego era ya muy conocido en China varios siglos antes de serlo en Europa. En los dominós chinos, llamados *kwat p'ai*, no hay piezas con caras en blanco. En este caso, la colección contiene todas las combinaciones, por pares, desde el 1-1 hasta el 6-6 (21 piezas), pero hay además 11 piezas duplicadas, así que en total son 32. Lo mismo que ocurre con los dados chinos, el as y el cuatro tienen los puntos grabados en rojo. Los puntos de las piezas restantes son blancos (o negros, si las piezas son blancas), salvo en el 6-6, donde tres de los seis puntos de cada cuadro son también rojos. (Los dominós coreanos son idénticos, con la única particularidad de que en el as, el punto es mucho mayor que en las demás piezas). En los dominós chinos, cada pieza tiene un nombre pintoresco: el 6-6 es «el cielo»; el 1-1 es «la tierra», el 5-5 es «la flor del ciruelo», el 6-5, la «cabeza del tigre», etc. Los nombres de las piezas son iguales a los que reciben los 21 posibles resultados del lanzamiento de un par de dados.

Los dominós chinos suelen ser de cartón, en vez de la madera, marfil, pasta o ébano que es habitual en los nuestros, y se manejan como naipes. Lo mismo que en Occidente, estas piezas sirven para numerosos juegos. Sobre los juegos occidentales más extendidos puede consultarse en cualquier edición reciente del *Hoyle's Games*. Con respecto a los juegos de dominó chinos y coreanos, seguramente la mejor referencia sea *Games of the Orient*, de Stewart Culin, obra de 1895 reimpresa por Charles Tuttle en 1958. No hay dominós propiamente japoneses, y en este país se juega con el sistema occidental.

Según la *EncycIopaedia Britannica*, ciertas tribus esquimales utilizan piezas de hueso, de 60 a 148, en partidas y frenéticos torneos, con fuertes apuestas, que en ocasiones pueden ser las esposas de los jugadores. En Cuba, las partidas de dominó han sido desde hace mucho uno de los pasatiempos favoritos, y hasta hace algunos años podía decirse otro tanto de España, si bien esta afición ha decaído bastante sobre todo entre los jóvenes.

Uno de los más antiguos problemas de combinatoria con el dominó pide determinar de cuántas formas pueden colocarse en hilera todas las fichas de un juego completo (occidental), sometidas a la regla habitual: que los extremos de piezas en contacto tengan valores iguales. (Una colección se llama completa cuando contiene todos los pares desde el 0-0 hasta el *n-n*). El problema es interesante porque admite traducción inmediata a un problema de grafos (véase la Figura 59).

Despreciemos el conjunto trivial, que consta sólo de la pieza 0-0, y tomemos el juego completó más sencillo: 0-0, 0-1, 1-1 (a). La línea que va de 0 a 1 corresponde a la pieza 0-1. Los círculos indican que cada dígito está emparejado consigo mismo, y representan las piezas dobles del juego. El número de formas en que las tres piezas pueden ser dispuestas en fila es idéntico al número de formas en que el grafo puede ser recorrido mediante un camino continuo que no pase dos veces por una misma línea. Evidentemente, sólo hay dos itinerarios así, que difieren únicamente en el sentido de recorrido. Estos dos (0-0, 0-1, 1-1, y su inverso) dan las únicas formas de colocar las piezas en hilera, de forma que los valores de los extremos que se tocan sean iguales.

El problema es menos trivial para el juego de tamaño inmediatamente superior, formado por las seis piezas de 0-0 a 2-2. Su gráfico triangular (b) admite también un sólo recorrido (más el de sentido contrario) pero ahora el camino tiene que cerrarse y retornar al punto de partida, lo que significa que la correspondiente concatenación de dominós es un anillo cerrado: 0-0, 0-1, 1-1, 1-2, 2-2, 2-0; imaginemos unidos los dos extremos: 2-0, 0-0. La cadena puede abrirse por seis sitios, formando cada vez una hilera como la pedida, y por tanto hay seis soluciones distintas, ó 12, si se considera que sentidos de recorrido distintos dan hileras distintas.

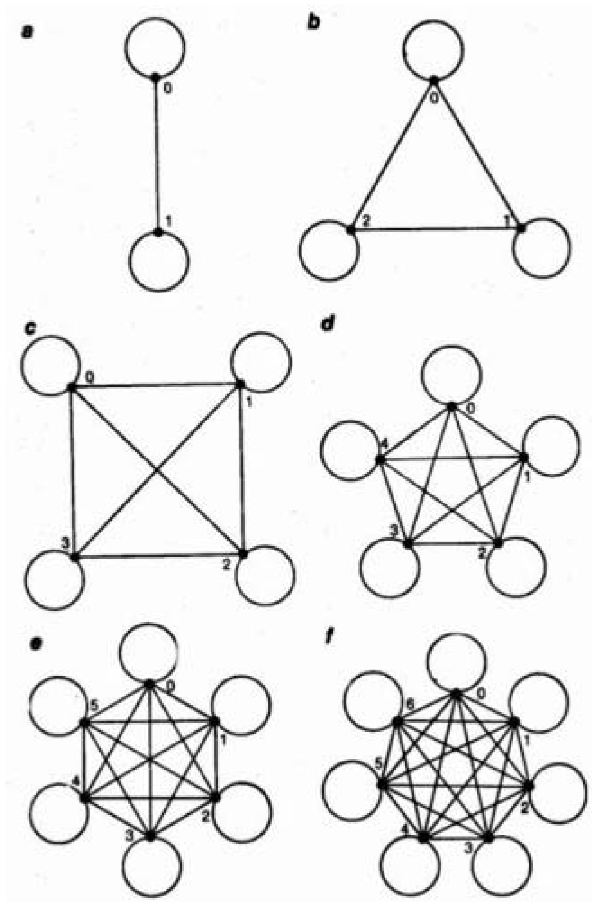

Figura 59. Grafos para resolver el problema de colocar en hilera, un juego completo de dominó

La colección completa de 10 dominós (de 0-0 hasta 3-3) presenta un giro inesperado (c). Ahora, los cuatro vértices son impares, es decir, en cada uno concurren un número impar de líneas. (El punto central, de intersección de las diagonales, no es considerado vértice.) Una clásica regla sobre trazado de grafos, que Leonhard Euler fue el primero en exponer en su famoso análisis del problema de los siete puentes de Königsberg, es que la condición necesaria y suficiente para que un grafo pueda ser recorrido completamente, sin pasar más de una vez por ninguno de sus lados, es que, o bien todos los vértices del grafo sean pares, o bien, de haberlos impares, estos sean exactamente dos. En el primer caso, el recorrido será siempre cerrado, y terminará donde empezó. En el segundo, el camino ha de empezar en uno de los vértices impares y terminar, necesariamente, en el otro. Como en nuestro caso tenemos cuatro vértices impares, no hay ningún camino que recorra todo el grafo y, por tanto, ninguna forma de que los 10 dominós puedan formar hilera. He aquí otra demostración equivalente de tal imposibilidad. En el juego completo de piezas, cada digito aparece cinco veces. La regla de igualdad de valores en contacto implica que cada dígito ha de presentarse un número par de veces en el interior de la hilera. Hay cuatro dígitos, pero como la fila tiene sólo dos extremos, es imposible la disposición en una sola hilera. Lo más que podemos hacer es recorrer el grafo con dos itinerarios disjuntos, o lo que es equivalente, formar dos filas de piezas, independientes. Como es obvio, las cifras extremas de las filas habrán de ser 0, 1, 2 y 3.

El «grafo completo» correspondiente a cinco puntos, al que se han añadido círculos en los vértices para indicar que éstos conectan consigo mismos, se corresponde con el conjunto completo de 15 teselas, desde 0-0 hasta 4-4 (d). Puesto que todos los vértices son pares, podemos trazar sobre el grafo un recorrido completo y cerrado. (Al igual que en todos los grafos de este tipo, los puntos de intersección del interior del polígono no son vértices.) El recuento del número de recorridos, cada uno de los cuales puede abrirse por 15 lugares, dando una cadena abierta, es tarea moderadamente complicada. Henry Ernest Dudeney, al resolver el problema en su *Amusement in Mathematics* (Problema 283), indica que el grafo pentagonal, círculos aparte, puede ser recorrido de 264 formas, cada una de las cuales produce un anillo de dominós. (Por ejemplo, el camino que comienza 3024... produce el anillo que comienza 3-0, 0-2, 2-4,...) Hay además que insertar en el anillo cinco piezas dobles, lo que puede hacerse de 25 = 32 maneras. Se obtienen así 264 x 32 = 8.448 anillos diferentes. Podemos abrir cada anillo de 15 modos, lo que produce en total 126.720 distintas ordenaciones en hilera, contadas ya las alineaciones en sentido inverso.

El grafo hexagonal correspondiente a seis puntos (e) tiene seis vértices impares. Por consiguiente, el conjunto completo de 21 dominós, desde 0-0 hasta 5-5, no puede ser dispuesto en hilera. Lo más que podremos lograr son tres cadenas distintas, cuyos extremos serán 0, 1, 2, 3, 4, 5.

El juego ordinario de 28 dominós, de 0-0 hasta 6-6, tiene un grafo heptagonal (f). Notemos que 28 es el segundo de los números perfectos (números iguales a la suma de sus divisores). Todos los números perfectos son triangulares (sumas de enteros consecutivos, 1, 1 + 2, 1 + 2 + 3,...). Basta una ojeada a la Figura 58 para comprobar que los números triangulares coinciden con los números de piezas de los conjuntos completos de dominós. Todos los vértices del grafo heptagonal son pares, y por consiguiente son posibles los recorridos cerrados. ¡Hay nada menos que 7.959.229.931.520 de estos recorridos, es decir de cadenas cerradas de 28 piezas que podemos abrir por 28 sitios! El correspondiente producto dará todas las alineaciones de los 28 dominós, contadas las de un sentido, y también las de sentido inverso. En todo conjunto completo, exceptuado el que tiene 1 como puntuación máxima, la condición necesaria y suficiente para poder disponerlo en hilera es que el máximo de las puntuaciones de sus fichas sea par. Cuando el máximo, n, de las puntuaciones sea impar, harán falta al menos $(n + 1)/2$ líneas, apareciendo en los extremos de éstas la totalidad de los n dígitos.

La propiedad de que toda cadena formada por los 28 dominós haya de ser cerrada sirve de base a un viejo truco de salón. El mago retira disimuladamente una cualquiera de las piezas, que no sea doble, y sale de la habitación; los demás jugadores colocan los dominós restantes en una sola hilera, conforme a la regla del juego. Una vez hecho así, el mago es capaz de decirles cuáles serán las puntuaciones de los extremos de la hilera sin para nada observar las piezas. Como es evidente, serán las que porte la pieza que él retiró. (Si lo prefiere, puede predecir por adelantado los números que resultarán, anotándolos en un papel, que se pliega y guarda aparte.) Para repetir el truco, bastará devolver la pieza robada mientras se procede a mezclarlas nuevamente, y retirar, oculta entre los dedos, una nueva pieza.

Se han propuesto muchos problemas de dominó que piden formar con las 28 piezas del juego completo algún polígono simétrico que cumpla ciertos requisitos. Así, un matemático francés del siglo pasado, Edouard Lucas, en el segundo volumen de sus *Récréations Mathématiques*, introduce las que él bautizó con el nombre de «cuadrillas», que son polígonos donde las 28 fichas están dispuestas de forma que las ocho caras que contienen un mismo valor queden agrupadas en dos cuadrados de dos cuadros de lado cada uno. Mostramos aquí una cuadrilla tomada de la obra de Lucas. Con esta figura de contorno, la solución es única, excepto por permutación de los valores y transformaciones por simetría de la figura completa (véase la Figura 60).

Otro pasatiempo clásico consiste en formar cuadrados mágicos de dominós. Un cuadrado es mágico cuando todas sus filas y columnas, y también sus diagonales principales, tienen la misma suma. Usando piezas del juego normal sólo podrían construirse, en principio, cuadrados mágicos de órdenes 2, 4 y 6. (Los cuadrados de orden impar tienen número impar de casillas, y por consiguiente, al querer construirlos con dominós es forzoso dejar al menos un hueco.) El cuadrado mágico de orden 2 es claramente imposible, pues incluso prescindiendo de las diagonales, las dos fichas tendrían que ser idénticas, y en el dominó no existen piezas repetidas.

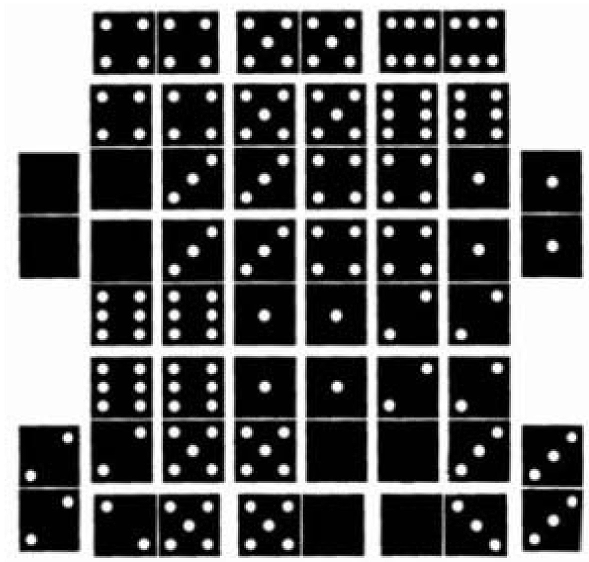

Figura 60. Una "cuadrilla de muestra

Un cuadrado mágico de orden 6 y mínima constante (13) puede ser fácilmente transformado en otro de constante máxima (23), sin más que sustituir cada cifra por su diferencia respecto de 6; los cuadrados así relacionados se llaman «complementarios» módulo 6. Para demostrar que 13 y 23 son las constantes mágicas mínima y máxima, empecemos observando que el total de puntos de un cuadrado mágico de orden 6 ha de ser exactamente divisible entre 6. Puesto que 78 y 138 son, respectivamente, el mínimo y el máximo de los múltiplos de 6 que son descomponibles en suma de puntuaciones de 18 dominós, resulta que 78/6 = 13, y 138/6 = 23 son las constantes mágicas mínima y máxima posibles.

Las constantes mínima y máxima para cuadrados mágicos de orden 4, formados por ocho dominós tomados del juego normal, son 20/4 = 5 y 76/4 = 19. Partiendo de un cuadrado con la constante 5 (Figura 61, abajo a la izquierda) y reemplazando cada dígito por su diferencia con respecto a 6, se obtiene un cuadrado mágico de constante máxima (19). Es posible construir con dominós cuadrados mágicos de orden 4 para todo valor de la constante mágica comprendido entre 5 y 19. ¿Sabrá el lector encontrar ocho dominós del juego ordinario que rellenen el modelo «en negro» (parte inferior derecha de la ilustración) y que sumen 10 según todas las filas, columnas y diagonales principales? En 1969, Wade E. Philpott demostró la posibilidad de formar cuadrados mágicos de dominós, de orden 6, para todo valor de la constante comprendido entre 13 y 23.

Para ver qué sucede con los cuadrados mágicos de orden impar, es forzoso adoptar alguno de los siguientes convenios, nada elegantes, dicho sea de paso:

1. Dejar un hueco de un cuadro, y hacerlo contar como cero. No cuesta mucho demostrar la imposibilidad de los cuadrados mágicos de orden 3 así configurados.
2. Consentir en que uno de los cuadros de una ficha (preferiblemente, de puntuación cero) sobresalga del cuadrado.
3. Tratar cada pieza como un solo número de valor igual a la suma de sus puntos. Puesto que los dominós sencillos del juego ordinario tienen todas las sumas de 1 a 12, el único cuadrado mágico de orden 3 que contiene los nueve dígitos positivos 1, 2, ..., 9, puede ser construido con nueve dominós. Para los órdenes 5 y 7 es preciso emplear sumas repetidas. Leslie E. Card ha descubierto que cualquier conjunto de 25 dominós tomados del juego normal permitirá formar un cuadrado mágico de este último tipo. (Véase «An Enumeration Problem», por David E. Silverman, *Journal of Recreational Mathematics*, octubre de 1970, pp. 226-27).

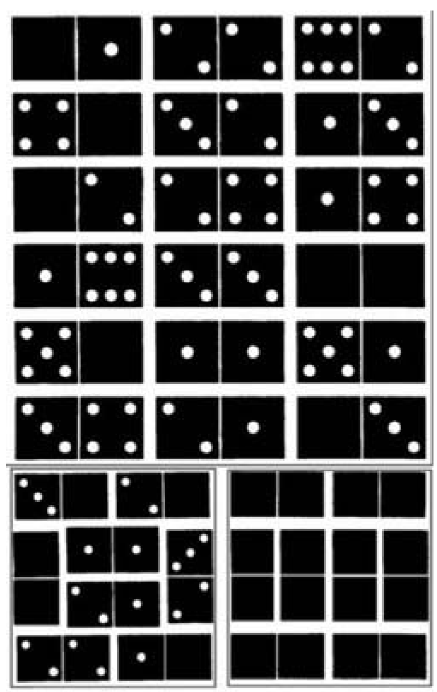

Figura 61. Cuadrados mágicos con dominó

He tenido noticia de un intrigante rompecabezas con dominós a través de Lech Pijanowski, crítico cinematográfico polaco y redactor de una sección semanal dedicada a juegos de habilidad intelectual. Pijanowski ha escrito también un libro de 360 páginas sobre juegos de tablero, *Podroze W. Krainie Gier* [*Viaje al país de los juegos*]. En el que aquí nos ocupa pueden participar cualquier número de jugadores; nosotros supondremos que sean solamente dos. Cada uno procede como seguidamente explico: estando su oponente fuera de la habitación, revuelve las 28 piezas de un juego ordinario (con las puntuaciones hacia abajo) y forma con ellas un rectángulo de siete por ocho, al azar. Se vuelven cara arriba las piezas y se copian sus puntuaciones en un casillero, pero sin mostrar la disposición de las piezas. (Es conveniente hacer una segunda copia que sí muestre su disposición, para demostrar más tarde que tal formación existe verdaderamente.) Los jugadores se intercambian los casilleros de números; el primero en lograr construirlo con fichas gana la partida. Como muchas de las formaciones de números admiten más de una solución, no es necesario hallar la primitiva disposición de los dominós, sino que basta atinar con una que se ajuste a los datos del damero.

Una vez recibida la matriz de números, ¿cómo debemos proceder para dar una solución? Pijanowski sugiere enumerar todos los pares de números que figuran en las 28 piezas, y después inspeccionar la matriz, en búsqueda de aquellos pares que sólo puedan encontrarse en un sitio. En nuestro ejemplo, 4-5, 2-2, 3-6, y 4-4 tienen que encontrarse donde muestra la Figura 62 (b). Podemos añadir inmediatamente el 0-0 y el 3-3, pues no pueden quedar huecos. Dado que ya será imposible que el 0-0 y el 3-3 aparezcan en nuevos lugares, se trazan las dos barras pequeñas, que muestran que ningún dominó puede cruzar ninguna de ellas.

La pieza 2-5 puede encontrarse horizontalmente, o verticalmente, como indican las líneas de trazos (c). En cualquiera de estos casos 01 tendrá que ir en el lugar señalado, a partir del cual podemos añadir 1-3 y 0-4, para evitar la duplicación de 0-1.

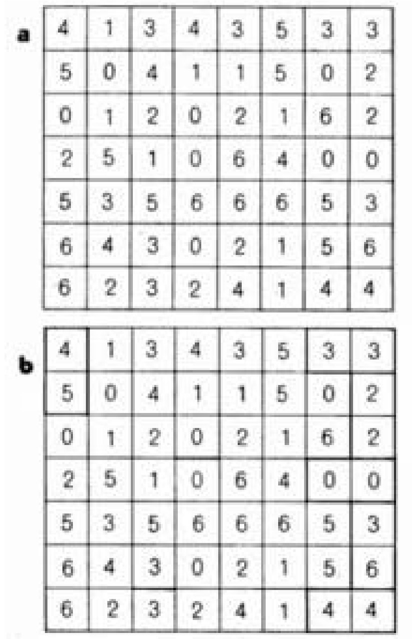

Figura 62. Resolución del problema de formar un casillero numérico con piezas de dominó (véase también la figura siguiente)

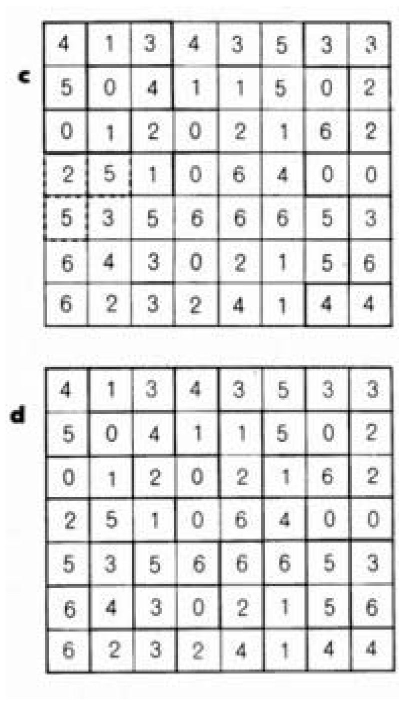

Figura 62a

Podemos añadir inmediatamente nuevas barras. Prosiguiendo de este modo ya no es difícil descubrir una solución. La Figura 62-d muestra una de las cuatro soluciones posibles.

Insto al lector a que mida sus fuerzas con la matriz que vemos en el lado izquierdo de la Figura 63; es sólo un poco más difícil que la explicada y su solución es única. De tener éxito, quizá le sirva de acicate para probar suerte, con la matriz del lado derecho de la misma figura, que tiene dificultad extraordinaria. Ambas han sido facilitadas por Pijanowski; la segunda admite ocho soluciones.

2	3	3	1	6	6	0	4
5	2	3	0	4	6	1	1
1	4	6	1	3	3	0	1
1	0	2	5	6	6	3	2
5	5	2	0	5	4	4	5
5	5	1	3	2	0	0	3
4	4	4	0	2	2	6	6

6	5	1	1	3	5	3	3
2	4	1	4	3	2	2	4
1	2	5	0	0	2	1	1
6	1	0	0	0	0	6	3
6	5	4	0	0	1	6	2
5	2	4	6	3	3	6	4
4	2	4	3	5	5	5	6

Figura 63. Dos problemas de matrizado con dominós

Soluciones

En la Figura 64 podemos ver dos de las muchas soluciones del problema del cuadrado mágico con dominós.

3	4	1	2
3	1	5	1
2	1	3	4
2	4	1	3

2	1	4	3
2	4	0	4
3	4	2	1
3	1	4	2

Figura 64. Soluciones de los cuadrados mágicos

La solución (única) de la primera matriz de Pijanowski se encuentra en la parte izquierda de la Figura 65. La segunda matriz admite ocho soluciones. Hay tres disposiciones fundamentales: de la que vemos en la Figura 65 (derecha), que admite una segunda variante, por reordenación trivial de las dos fichas sombreadas; una segunda, también con dos variantes resultantes de redisponer estas dos mismas piezas, y una tercera, que contiene dos cuadrados de orden dos, cada uno de ellos reconstruible en dos posiciones, que dan cuatro soluciones más.

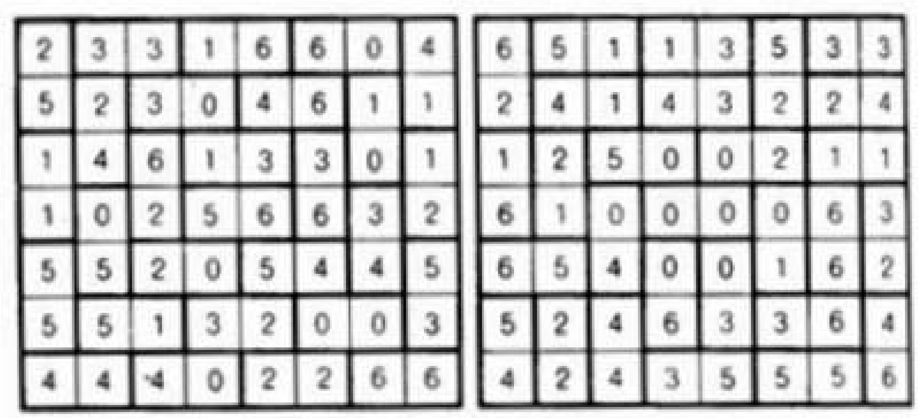

Figura 65. Soluciones de las matrices de dominós