Capítulo 11

El ajedrez extravagante y otros problemas

1. Ajedrez extravagante

Al visitar, hace poco, un club ajedrecístico imaginario tuve ocasión de observar el desarrollo de una partida entre los señores Blanco y Negro, los dos jugadores del club que más se distinguían por la extravagancia de sus partidas. Para sorpresa mía, el tablero mostraba la posición de la Figura 50.

Figura 50. Situación de las piezas tras la cuarta jugada de las negras

Pensé enseguida que cada jugador había empezado la partida sin su caballo de rey, y que las primeras en mover habían sido las negras. El señor Negro me explicó entonces que acababa de realizar su cuarta jugada, en una partida ajustada a las reglas ordinarias y, que se había desarrollado como sigue:

Blancas	**Negras**
1. C3AR	P4D
2. C5R	C3AR
3. C6AD	CR2D
4. C x C	C x C

Una hora más tarde, tras perder una partida frente a otro jugador, volví a echar un vistazo al tablero de Blanco y Negro. En su segunda partida, el tablero tenía exactamente el mismo aspecto que antes, salvo que ahora faltaban *todos* los caballos. El señor Negro, que acababa de mover una pieza negra, alzó la vista del tablero y dijo: «Acabo de realizar mí *quinta* jugada».

a) ¿Sabrá el lector construir una partida que produzca tan curiosa situación inicial, valiéndose tan sólo, claro está, de jugadas lícitas?

«Ya que estamos en ello», me dijo el señor Blanco, «he inventado un problema que tal vez podría resultarle entretenido a sus lectores. Supongamos que volcamos una caja completa de piezas en una bolsa las 16 piezas blancas y las 16 negras, que agitamos la bolsa para mezclarlas bien, y vamos después sacando las piezas al azar, de dos en dos. Si ambas son negras las colocamos en la mesa, comenzando a formar con ellas el grupo negro. Si ocurre que ambas son blancas, las ponemos en otro lugar de la mesa, iniciando así el grupo de las blancas. Finalmente, si las piezas salen de distinto color, las colocamos en la caja que las contenía inicialmente. Una vez extraídas de la bolsa la totalidad de las 32 piezas, ¿qué probabilidad hay de que el número de piezas del grupo negro sea exactamente igual al número del grupo blanco?» «Hummm...», musité. « Así, a primera vista, parece que la probabilidad debería ser bastante pequeña.» Negro y Blanco disimularon una sonrisita maliciosa, y prosiguieron su partida.

b) ¿Cuál es exactamente la probabilidad de que ambos grupos consten de igual número de piezas?

2. Una Eva charlatana

El criptaritmo que aquí presento (o alfamético, como prefieren llamarlo algunos problemistas) es muy antiguo y de origen desconocido; seguramente sea uno de los mejor construidos. Lo ofrezco aquí con la esperanza de que no sea demasiado conocido de los lectores:

$$\frac{EVE}{DID} = O,TALKTALKTALK\ldots$$[1]

Como siempre, letras iguales representan cifras iguales, entre las que puede hallarse el 0. La fracción EVE/DID ha sido ya simplificada al máximo, o sea, es irreducible. Su desarrollo decimal tiene un período de cuatro cifras. La solución del criptaritmo es única. Para dar con ella, recuérdese que el procedimiento habitual para hallar la fracción generatriz de un

[1] La fracción se lee «Eyeoverdid talk talk ... » que puede traducirse por «Eva se pasó en el dale que dale, dale que dale ... » (N. del T.)

decimal periódico puro, cuyo período conste de *n* cifras, es tomar el bloque periódico y dividirlo por *n* nueves, simplificando después todo lo posible la fracción así obtenida.

3. Tres cuadrados

Sirviéndose tan sólo de geometría elemental (no es lícito usar ni siquiera trigonometría) hay que demostrar que el ángulo *C* de la Figura 51 es suma de los ángulos *A* y *B*.

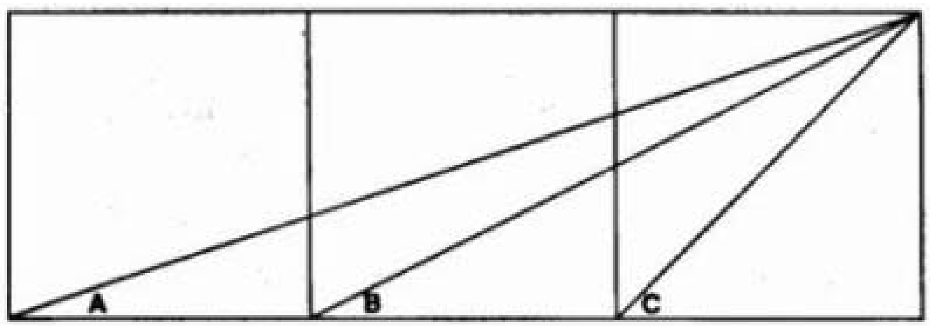

Figura 51. Demostrar que el ángulo A mas el ángulo B es igual al ángulo C

Tengo que agradecer a Lyber Katz el haberme comunicado este problema, que es de una sencillez fascinante. En una carta me explicaba que de niño fue a la escuela en Moscú, donde les propusieron el problema en 5º de Básica «para subir nota». En su carta, Katz añade que «el número de callejones sin salida a que conduce el problema es extraordinario».

4. La proposición de Pohl

Frederik Pohl, uno de los mejores escritores de ciencia ficción, ha ideado este truco, recientemente publicado en una revista de ilusionismo llamada *Epilogue*. Es probable que los expertos en informática lo resuelvan más rápidamente que los demás.
Se le pide a un espectador que dibuje en un papel una hilera de pequeños círculos, que representan otras tantas monedas. Mientras así lo hace, el mago permanece de espaldas. El espectador, al término, coloca la yema del pulgar de su mano derecha sobre la primera circunferencia de forma que con el pulgar y el resto de la mano oculte, completamente la hilera de círculos. El mago se vuelve entonces hacia él, y le apuesta a que es capaz de anotar inmediatamente en la hoja un número que indicará el número total de posibles combinaciones de caras y cruces que resultarían de lanzar cada una de las monedas. Por ejemplo, dos monedas pueden caer de cuatro formas distintas, tres monedas, de ocho, y así sucesivamente.

No hay forma de saber cuántas monedas dibujó: sin embargo, es fácil ganar la apuesta. ¿Cómo?

5. Los bloques deslizantes de Escott

Este notable y curioso rompecabezas fue ideado por Edward Brind Escott, matemático americano fallecido en 1946. (Véase la Figura 52.)

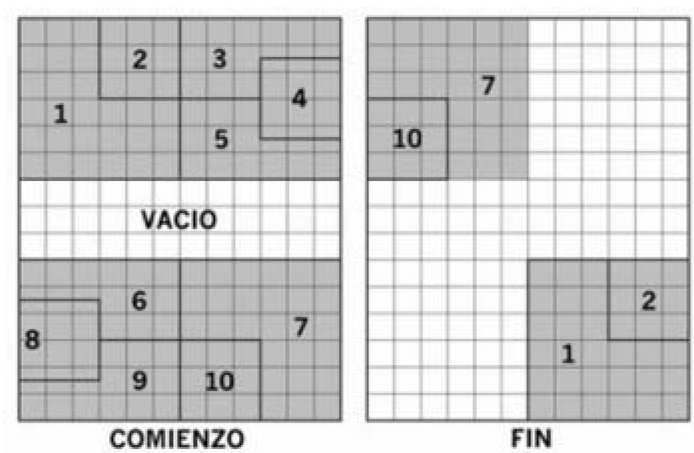

Figura 52. El rompecabezas de bloques deslizantes de Escott

El problema apareció en el número de agosto de 1938 de una revista de vida efímera, llamada *Games Digest*. No llegó a publicarse ninguna solución. El problema consiste en ir haciendo deslizar los bloques de uno en uno, manteniéndolos en contacto con el plano y sin salirse del marco rectangular, hasta que los bloques 1 y 2 hayan intercambiado sus puestos con los bloques 7 y 10. De esta forma, en la posición final los dos pares de bloques se encontrarán como muestra la figura de la derecha, estando las restantes piezas en otros lugares, no dibujados, del tablero. No es lícito hacer girar ningún bloque, aún suponiendo que hubiera espacio para ello; cada uno ha de conservar su orientación primitiva al tiempo de desplazarse hacia arriba, abajo, hacia la derecha o hacia la izquierda.

Escott era un especialista en teoría de números, y publicó abundantemente en diversas revistas matemáticas. Fue profesor en diversas escuelas y facultades del Middle West, y en sus últimos años, actuario de una compañía de seguros.

6. Pesas rojas, blancas y azules

Durante estos últimos decenios se han puesto de moda los problemas de balanzas y pesadas. He aquí uno no muy conocido, inventado por Paul Curry, bien conocido entre los aficionados al ilusionismo.

Tenemos seis pesas. De ellas, un par es rojo, otro par, blanco, y el tercero azul. En cada par, una de las pesas es levemente más pesada que la otra, siendo por lo demás indistinguible de su gemela. Las tres más pesadas (una de cada color) tienen pesos idénticos, y lo mismo es cierto de las tres más livianas.
Haciendo únicamente dos pesadas con una balanza (de platillos), ¿cómo podríamos identificar en cada par la pesa liviana y la más pesada?

7. El número de los diez dígitos

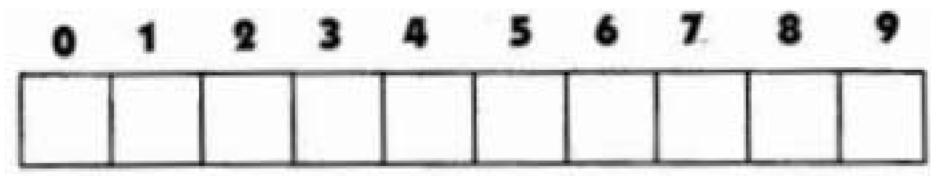

Figura 53. Un problema digital

En las 10 casillas de la Figura 53 hay que inscribir un número de 10 cifras tal que el dígito que ocupe la primera casilla (marcada con un 0) exprese el número de ceros que contiene en total el número problema, que el dígito de la casilla «1» indique cuántos unos figuran en el número, y así sucesivamente, hasta la última casilla, que dirá el número de nueves que en él intervienen. (Corno es obvio, el 0 es también un dígito.) La solución del problema es única.

8. Monedas en la bolera

Kobon Fujimura, uno de los más distinguidos creadores de problemas de ingenio del Japón, ha preparado este rompecabezas, que figura en uno de sus libros más recientes. Se colocan diez monedas iguales, de una peseta, por ejemplo, en la formación triangular con que se disponen los bolos (véase la Figura 54).
¿Cuál será el número mínimo de monedas a retirar con el fin de que con los centros de las restantes no pueda construirse ningún triángulo equilátero, de ningún tamaño? De considerar como idénticas aquéllas formaciones que puedan deducirse unas de otras por giros o simetrías, resulta existir únicamente una configuración donde el número de monedas retiradas sea mínimo. Notemos que en la disposición inicial existen dos triángulos equiláteros al bies, cuyas bases no son horizontales.

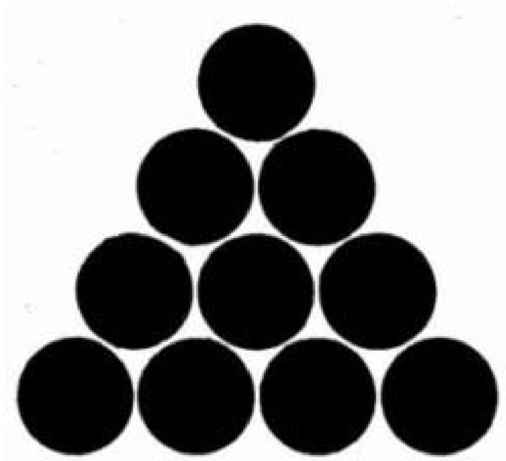

Figura 54. Problema "monetario" de origen japonés

1 Soluciones

1. *a*. Un posible desarrollo como el pedido es:

Blancas	Negras
1. C3AR	C3AR
2. C3AD	C3AD
3. C4D	C4D
4. CR x C	PC x C
5. C x C	P x C

Ambos problemas fueron reimpresos en el número de verano de 1969 de una revista matemática llamada *Manifold*, publicada en la Universidad de Warwick, en Coventry, Inglaterra. En ella se citaba como fuente un número de la *Chess Review* del año 1947. La variante aquí presentada se debe al ajedrecista norteamericano Larry Blustein.

Mannis Charosh me ha llamado la atención acerca de una interesante versión del problema de los caballos desaparecidos. En lugar de eliminar los caballos de rey de ambos bandos deben suprimirse los de dama y además, en lugar de avanzar dos cuadros con el peón de dama ahora debe avanzar sólo uno. También este problema admite solución en cuatro jugadas; pero la solución tiene ahora el mérito de ser única. (En la versión que he presentado aquí, las dos primeras jugadas de las negras son intercambiables.) La nueva variante apareció en la *Fairy Chess Review* de febrero de 1955, siendo allí atribuida a G. Schweig, quien la dio a conocer en 1938. Dejo al cuidado del lector la tarea de resolverla.

b. La probabilidad es 1. Puesto que los pares de piezas desechados contienen una pieza de cada color, los números de piezas blancas y negras sobrantes serán idénticos.

2. Como ya expliqué, para obtener la fracción generatriz de un número decimal periódico puro, se escribe el bloque periódico en el numerador, y en el denominador, tantos nueves cuantas cifras tenga el bloque periódico. En este ejemplo, TALK/9999, simplificada al máximo, debe dar EVE/DID. Por consiguiente, DID tiene que ser divisor de 9999. Tan sólo hay tres divisores de 9999 que sean capicúas y de tres cifras, esto es, tan sólo hay tres candidatos para DID: 101, 303, y 909.

Si fuese DID = 101, entonces EVE/101 = TALK/9999, y de aquí, EVE = TALK/99. Reordenando términos, TALK = (99)(EVE). Como hemos supuesto que DID es 101, EVE ya no podrá serlo, y siendo EVE capicúa, tendrá que ser mayor que 101. Ahora, un número mayor que 101 multiplicado por 99 dará producto con al menos cinco cifras. Como TALK tiene sólo cuatro, la hipótesis DID = 101 debe ser descartada.

De ser DID = 909 tendríamos EVE/909 = TALK/9999 y despejando, TALK = (11)(EVE). Pero entonces la última cifra de TALK tendría que ser E. Por no serlo, también es preciso desechar la posibilidad DID = 909.

Tan sólo cabe, pues, que DID = 303. Como EVE tiene que ser menor que DID (porque su cociente empieza 0,...) E sólo puede ser 1 ó 2. De los 14 números capicúas que empiezan por estas cifras (121, 141, ..., 292) únicamente 242 produce un desarrollo decimal conforme al esquema 0,TALKTALKTALK... donde todas las cifras del período son distintas de las de EVE y DID.

La única solución es, por tanto, 242/303 = 0,79867986... De no haber supuesto que la fracción EVE/DID era irreducible, habría una segunda solución, 212/606 = 0,34983498... lo que demuestra, como Joseph Machady agudamente hizo notar, que EVE no sólo hablaba sin parar (EVE-OVER-DID-TALK ...) sino que al hablar lo hacía con segundas... (double-talked).

3. Hay muchas formas de probar que el ángulo *C* (Figura 51) es suma de los ángulos *A* y *B*.

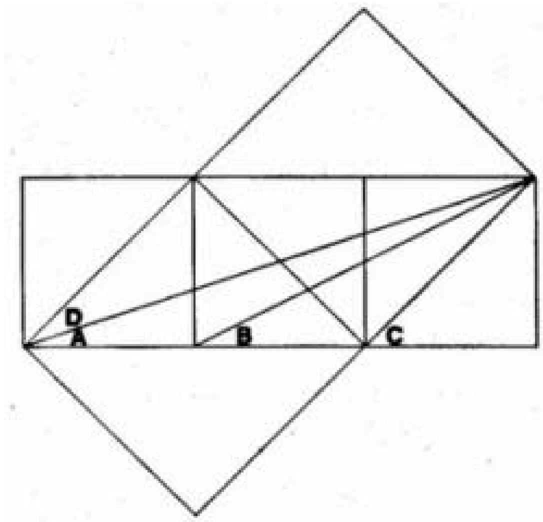

Figura 55. Construcción que demuestra el teorema de los tres cuadrados

He aquí una sencilla (Figura 55). Construyamos los cuadrados trazados con línea gris. Los ángulos *B* y *D* son iguales, por ser homólogos en triángulos rectángulos semejantes. Como los ángulos *A* y *D* suman, evidentemente, *C*, basta sustituir *D* por su igual *B* para tener demostrado que *C* es suma de *A* y de *B*.

Este problemita provocó una riada de cartas de lectores enviando docenas de diferentes demostraciones. De ellos, buena parte evitaron recurrir a construcciones geométricas, tomando las diagonales iguales a las raíces cuadradas de 2, 5 y 10, y calculando después razones de segmentos hasta dar con dos triángulos semejantes de los cuales se dedujera la demostración pedida. Otros corresponsales, en cambio, han generalizado el problema en las formas más insólitas.

En el *Journal of Recreational Mathematics* se encuentran publicadas 54 demostraciones diferentes, recopiladas por Charles Trigg (vol. 4, abril de 1971, pp. 90-99). Una demostración con papel y tijeras, de Ali R. Amir-Moéz, apareció en la misma revista (vol. 5, invierno de 1973, pp. 89). Pueden verse otras demostraciones en una nota de Roger North publicada en la *Mathematical Gazette*, diciembre de 1973, pp. 334-36, con segunda parte en la misma revista, octubre de 1974, pp. 212-15. Puede verse una generalización del problema a una hilera de cuadrados en el artículo de Trigg: «Geometrical Proof of a Result of Lehmers», en *The Fibonacci Quarterly*, vol. 11; diciembre de 1973, pp. 539-40.

4. Para ganar la apuesta es suficiente escribir un 1 junto a la yema del pulgar que está ocultando la hilera de círculos. Al levantar la mano nuestro espectador, el papel mostrará un número binario formado por un 1 seguido de una hilera de ceros. Suponiendo que los ceros representen *n* monedas, este número binario será equivalente al número decimal 2n que es

el número total de distintas ordenaciones en que pueden salir cara o cruz al lanzar sucesivamente *n* monedas.

5. Al presentar el rompecabezas de bloques deslizantes de Escott en mi sección de *Scientific American* di una solución que requería 66 movimientos. Muchos lectores consiguieron rebajar tal número a sólo 48, y ésta es por ahora la solución más breve que se conoce. Mas la solución de 48 movimientos no es única. La que presentamos en la Figura 56 (que me fue enviada por John W. Wright) puede considerarse típica. Las letras S, B, D, I (subir, bajar, derecha, izquierda) sirven para denotar los movimientos. En todos los casos es preciso mover las piezas indicadas tanto cuanto sea posible en la dirección expresada.

Movimiento	Bloque	Dirección
1	6	S, D
2	1	B
3	5	I
4	6	I
5	4	B
6	5	D
7	2	B
8	3	I
9	5	S
10	2	D
11	6	S, I
12	4	I, S
13	7	S
14	10	D
15	9	D
16	8	B
17	1	B
18	7	I
19	2	B
20	4	D, B
21	5	B
22	3	R
23	6	S
24	5	I, S

Movimiento	Bloque	Dirección
25	4	S
26	2	S
27	10	S
28	9	D
29	7	S
30	1	S
31	8	S, D
32	1	B
33	7	I
34	10	I
35	2	I
36	4	B
37	2	D, B
38	3	B
39	6	D
40	5	D
41	7	S
42	10	I, S, I, S
43	8	S, I, S, I
44	4	I, S
45	2	B, I
46	9	S
47	2	D
48	1	D

Figura 56. Una solución en 48 movimientos para el rompecabezas de los bloques deslizantes

Como la disposición inicial tiene doble simetría, toda solución tiene una inversa. En este caso la inversa comienza por desplazar la pieza número 5 hacia abajo y a la izquierda, en lugar de la pieza 6, que iba hacia la derecha y arriba, y prosigue ejecutando simétricamente los correspondientes movimientos.

6. Un procedimiento para resolver el problema de las seis pesas dos rojas, dos blancas y dos azules consiste en colocar en un platillo una pesa blanca y una roja, y en el otro, una blanca y una azul.

Si la balanza quedase en equilibrio, sabríamos que en cada platillo hay una pesa liviana y otra con sobrepeso. Retiremos de los platillos las pesas de color, dejando únicamente las blancas, una en cada uno. Sabremos así en qué platillo está la pesa blanca más ligera, y en cuál la más pesada. Al mismo tiempo, ello nos dice cuál de las pesas antes empleadas (una roja, una azul) es más ligera que la otra, lo que a su vez nos aclara cuáles son las pesas liviana y pesada del par azul-rojo no usado todavía.

Si la balanza no queda en equilibrio al efectuar esta primera pesada, es seguro que caerá del lado donde se encuentre la pesa blanca de mayor peso. Empero seguimos a oscuras con respecto a la roja y la azul. Compararemos pues la roja ya utilizada con la gemela de la azul empleada para la primera pesada (o bien, la azul primitiva con la gemela de la roja). Como hace notar C. B. Chandler (a quien debo esta sencilla solución) el resultado de la segunda comparación más el recuerdo de lo ocurrido en la primera, ya es suficiente para distinguir las seis pesas.

Aquellos lectores que hayan encontrado este problema de su gusto podrán pasar otro rato entretenido analizando la siguiente variante, ideada por Ben Braude, mago amateur y dentista, neoyorquino. Las seis pesas son idénticas en todos los aspectos (color incluido) salvo en que hay tres que son más pesadas que las otras. Las tres con sobrepeso son idénticas; lo mismo ocurre con los pesos de las tres más ligeras. La tarea consiste en identificar cada una de las seis haciendo tres pesadas independientes con una balanza.

Como Thomas O'Beirne ha hecho notar, el problema de Braude ofrece dos tipos de soluciones, de caracteres que podríamos llamar complementarios o duales. En unas, las pesas son comparadas par contra par; en otras, cada platillo es cargado siempre con una sola pesa. Debo a John Hamilton la concisa tabla siguiente, donde se dan las cuatro posibilidades del método más sencillo (publicado en el número de marzo de 1970 de una revista de ilusionismo, *The Pallbearers Review*).

1	**2**	**3**	**4**
a \ B	a \ B	a – b	a – b
c \ D	c – d	b – c	b \ C
e \ F	d \ E	c \ D	D – E

Las letras mayúsculas indican pesos con sobrecarga, y las minúsculas, pesos mermados. Un trazo horizontal indica equilibrio, mientras que la barra oblicua muestra de qué lado cae la balanza.

7. La solución, única, es 6.210.001.000. No dispongo aquí de espacio para dar una demostración detallada; puede verse una francamente buena en la sección de divertimentos matemáticos de la *Technical Review* (febrero de 1968) del M. I. T., debida a Edward P. DeLorenzo. En el mismo lugar del número de junio de 1968 hay una demostración de Kenneth W. Dritz de que para casilleros de menos de 10 cuadros, las únicas soluciones en numeración de base 10 son 1.210; 2.020; 21.200; 3.211.000; 42.101.000, y 521.001.000. Puede verse una solución general, debida a Frank Rubin, en el *Journal of Recreational Mathematics*, vol. 11, 1978-79, pp. 76-77. En ella demuestra que no existe ningún número «autodescriptivo» en las bases 1, 2, 3 y 6. En base 5 existe tan sólo uno, 521.000. En base 4 tenemos 1.210 y 2.020. y es la única base donde existe más de una solución de longitud igual a la base. En todas las bases mayores que 6 existe una única solución, que es de la forma R21 (0 ... 0)1.000, siendo R cuatro unidades menor que la base de numeración, y el número de ceros entre paréntesis, siete menos que la base.

8. El número mínimo de monedas a retirar es de cuatro (véase la Figura 57), correspondientes a las sombreadas en gris en la figura. De esta forma, nunca se podrán tomar tres centros de las monedas restantes que se encuentren en los vértices de un triángulo equilátero, Salvo por rotación, la configuración de las monedas es única, y evidentemente, idéntica a su simétrica.

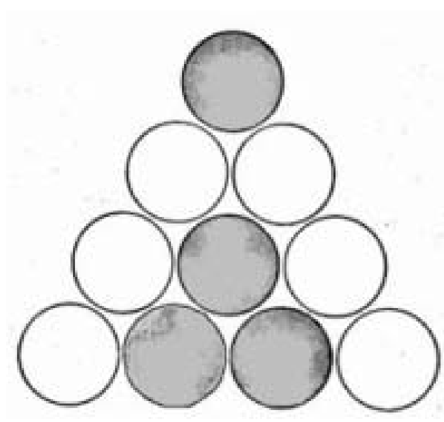

Figura 57. La solución al problema de las 10 monedas